विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 17 | जनवरी 1974 | संख्या 1

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 17, No 1, January, 1974, Pages 1-11

विज्ञान का समाज पर प्रभाव

हरि नारायण*
निदेशक, राष्ट्रीय भू-भौतिकी अनुसन्धान संस्थान, हैदराबाद

विज्ञान का प्रादुर्भाव मानव इतिहास की सबसे महत्वपूर्ण घटना मानी जा सकती है । आधुनिक विज्ञान ने समाज के हर पहलू को प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से प्रभावित कर रक्खा है । उसने समाज की अनेक समस्याओं का हल ढूंढ निकाला है । चिकित्सा विज्ञान ने अनेक रोगों से मानव को मुक्ति दिलाई है। तकनीकी ज्ञान-विज्ञान के मूलभूत सिद्धान्तों पर ही आधारित तकनीकी ज्ञान औद्योगीकरण के विकास में सहायक रहा है । कम्प्यूटर, टेलीविजन, रेडियो, टेलीफोन, वायुयान आदि उन्नत तकनीक की ही अमूल्य देन है । यातायात के निम्नांकित उदाहरण से स्पष्ट है कि विज्ञान के कारण कितना परिवर्तन सम्भव हो सका है :

'6000 ईसापूर्व ऊँट की सवारी की जाती थी जिससे 8 मील प्रतिघन्टा जाया जा सकता था । 1600 ईसापूर्व रथ बने जिससे 20 मील प्रतिघन्टा की गति से यातायात होता था । 18 वीं सदी में विज्ञान के आविष्कारों से वाष्प इंजिन बना जिससे 50 मील प्रतिघन्टा की गति से यातायात संभव हो सका । जहाज, हवाई जहाज आदि की सहायता से 1938 में 400 मील प्रतिघन्टा और 1960 में 4,800 मील प्रतिघन्टा से आवागमन के साधन उपलब्ध हो सके । विज्ञान ने अन्तरिक्ष यानों में यही गति 26,000 मील प्रतिघन्टा तक कर दी जिससे मानव का चन्द्र-तल पर अवतरण संभव हो सका ।'

इसी सन्दर्भ में टेलीविजन या रेडियो का उदाहरण प्रस्तुत करना उपयुक्त होगा । इनकी ही सहायता से विश्व के किसी भी स्थान पर घटी कोई घटना जैसे भूकम्प, लड़ाई या विद्रोह, किसी खेल का समाचार, किसी व्यक्ति-विशेष की चर्चा आदि, दुनिया के लाखों लोग तुरन्त ही देख या सुन सकते है ।

उक्त उदाहरणों के आधार पर यह कहना असत्य नहीं होगा कि विज्ञान ने दुनिया के समय तथा दूरी के मापदण्डों को संकुचित कर दिया है । फलतः विश्व के किसी भी भाग में हुई घटना का विश्व-व्यापी प्रभाव दिखाई देता है ।

*3 जनवरी 1974 को नागपुर में आयोजित, विज्ञान अनुसंधान गोष्ठी पर दिया गया अध्यक्ष-पदीय भाषण

यद्यपि विकसित और विकासशील देशों की सामाजिक समस्याएँ भिन्न भिन्न हैं, फिर भी ये दोनों प्रकार के समाज अपनी अपनी आवश्यकतानुसार विज्ञान के साहसिक कदमों का प्रयोग करते रहे हैं। किन्तु विज्ञान का प्रभाव तीन क्षेत्रों में स्पष्ट दीखता है। ये हैं:

1. स्वास्थ्य के क्षेत्र में
2. आर्थिक विकास के क्षेत्र में
3. ज्ञान के विकास के क्षेत्र में

स्वास्थ्य के क्षेत्र में विज्ञान

मानव के लिये चिकित्सा विज्ञान की उपलब्धियाँ वरदान स्वरूप रही हैं। ऐसे लाखों लोग जो चेचक; हैजा, मलेरिया आदि रोगों के कारण प्रतिवर्ष मृत्यु को प्राप्त होते थे, वे आज उक्त रोगों के समुचित निवारण हो जाने के कारण बचाये जा सके हैं। शल्य चिकित्सा की प्रगति से हृदय प्रतिरोपण, क्षत तथा निष्क्रिय अंगों के प्रत्यारोपण सम्भव हो सके हैं। शल्य तथा चिकित्सा विज्ञान ने मानव की औसत आयु में वृद्धि की है। इन्हीं के बल पर जरा अवस्था के असहनीय शारीरिक कष्टों पर विजय प्राप्त करना संभव हो सका है। जरा-विज्ञान सम्बन्धी शोधें वृद्धावस्था की ओर उन्मुख परिवर्तन की दर को बदलने में प्रयत्नशील हैं। इससे मनुष्य अधिक काल तक तरुण एवं सक्रिय रहकर जीवन का अधिक से अधिक उपभोग कर सकेगा। सूक्ष्मजीव विज्ञान, सूक्ष्मजीवाणु आदि अनुसन्धान अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं। विटामिनों, एन्जाइमों, एन्टीबायटिकों आदि से प्रभावशाली औषधियाँ बनाई जा रही हैं। मानव शरीर के लिये समुचित पोषण पर किये गये अनुसन्धानों से शरीर का यथोचित विकास संभव हो रहा है। इन अनुसन्धानों का विशेष महत्व भारत के समान विकासशील देशों के लिये अधिक है, जहाँ अनेक बच्चे, गर्भवती स्त्रियाँ और अनेक रोगी मात्र उचित पोषण के अभाव में कालग्रस्त हो जाते हैं।

औद्योगीकरण के कारण प्रदूषण अत्यन्त उग्र समस्या बन गया है। इस समस्या का आभास नीचे दिये गये उदाहरणों से हो सकेगा :—

'न्यूयार्क शहर के वातावरण परीक्षण से पता चला कि यदि कोई व्यक्ति 24 घंटे तक घर से बाहर रहे तो वह 40 सिगरेटों के पीने के बराबर दूषित गैस श्वास से भीतर ले जाता है। टोकियो शहर में अत्यन्त प्रदूषित होने वाले दिन मरने वालों की संख्या 200 तक पहुँच जाती है। सामान्य दिनों में यह संख्या 150 और छुट्टी के दिनों में यह संख्या घटकर 120 हो जाती है।'

यह समस्या विकसित देशों के लिये अत्यन्त चिन्ताजनक होती जा रही है। विकासशील देशों में औद्योगीकरण तो तीव्र गति से हो रहा है, परन्तु उससे उत्पन्न दूषित गैस तथा पानी का समुचित निकास नहीं हो पा रहा है। इस कारण नित्य नये कीटाणुओं तथा नये रोगों का जन्म होता है।

इस प्रदूषण समस्या के निवारण के लिये वैज्ञानिक सतत् प्रयत्नशील हैं। वायुमण्डलीय प्रदूषण से मुक्ति पाने के लिये विशाल पारदर्शी गुमटियों का प्रयोग सफल रहा है। जल तथा स्थल प्रदूषणों के सम्बन्ध में भी इसी तरह के विकल्प ढूंढे जा रहे हैं।

आर्थिक विकास के क्षेत्र में

(अ) प्राकृतिक सम्पदाओं का विकास

इतिहास इस बात का साक्षी है कि किसी भी देश का आर्थिक विकास प्राकृतिक सम्पदाओं (गैस, तेल, कोयला, खनिज, धातु आदि) की उपलब्धि पर निर्भर करता है। वर्तमान औद्योगीकरण और प्राकृतिक सम्पदाओं के अभाव के कारण ही ब्रिटिश सरकार को अफ्रीका तथा एशिया में उपनिवेश बनाने पड़े। इसमें दो रायें नहीं हैं कि प्राकृतिक सम्पदाओं के विकास पर ही किसी देश या समाज के कृषि एवं औद्योगीकरण का विकास निर्भर है। अतः भू-वैज्ञानिक अधिक से अधिक प्राकृतिक सम्पदाओं की खोज के लिये हर संभव विधि से प्रयत्नशील हैं।

(ब) ऊर्जा-स्रोतों की खोज

बढ़ती हुई तकनीक के साथ मनुष्य की आवश्यकताएँ भी बढ़ी हैं। कुछ वर्ष पूर्व तक घड़ी, रेडियो, बिजली आदि भोग की वस्तुएँ समझी जाती थीं तथा विशेष वर्ग के लोग ही इनका उपयोग कर पाते थे किन्तु आज ये आवश्यक वस्तुओं की सूची में आकर अधिकांश व्यक्तियों के उपयोग में आ रही हैं। अतः ये औद्योगीकरण के विकास एवं मानव जीवन के स्तर में प्रगति की सूचक हैं। फलस्वरूप आज विश्व को अधिक ऊर्जा की आवश्यकता का अनुभव होने लगा है।

1. **कोयला-तेल-गैस :** यद्यपि विश्व के कुछ स्थानों पर अभी भी तेल, कोयला आदि के भण्डार हैं परन्तु जिस गति से मानव इनका उपयोग कर रहा है, उससे आगामी दस वर्षों में अकाल की स्थिति निश्चित है यदि हम पृथ्वी के गर्भ में छिपे और अधिक ऊर्जा स्रोत नहीं खोज निकालते।

2. **न्यूक्लियर रिएक्टर :** इस समस्या के समाधान हेतु "न्यूक्लियर रिएक्टर", जिसमें यूरेनियम के परमाणु से ऊर्जा प्राप्त की जाती है, खोजा गया। इस परमाणु ऊर्जा को प्राप्त करने के लिये केवल 15 देशों में 127 रिएक्टर हैं तथा 150 निर्माणाधीन हैं। विश्व के सभी राष्ट्र आज इस ऊर्जा को प्राप्त करने का प्रयास कर रहे हैं। 1971 तक 20 लाख मेगावाट बिजली का उत्पादन न्यूक्लियर रिएक्टरों से सम्भव हो सकेगा।

अमेरिका के 'परमाणु शक्ति विभाग' ने घोषणा की है कि यदि इस प्रकार से प्राप्त परमाणु ऊर्जा का प्रयोग इसी गति से होता रहा तो इन रिएक्टरों का सस्ते में मिलने वाला ईंधन (यूरेनियम) सन् 2000 तक समाप्त हो जावेगा। अतः वैज्ञानिक यूरेनियम का न्यून उपयोग करने वाले तरल धातु तीव्रगामी रिएक्टर (Liquid metal fast breeder reactor), तथा संगलन रिएक्टर (Fusion reactor) की खोज में लगे हैं जिससे सभी परमाणु ऊर्जा प्राप्त हो सके तथा यूरेनियम की विश्वव्यापी कमी किसी प्रकार विकास में बाधक न हो।

ऊर्जा की बढ़ती माँग ने वैज्ञानिकों को ऊर्जा प्राप्त करने के लिये हर प्रकार से बाध्य किया है। इनमें से चार प्रयास प्रमुख हैं।

3. **ज्वार भाटाओं से :** समुद्र में उठने वाले ज्वार भाटाओं से विद्युत प्राप्त करने का सफल प्रयास ब्रिटेनी में किया गया। कनाडा तथा अमरीका में भी प्रयास हो रहे हैं। इससे प्राप्त विद्युत अपेक्षाकृत महँगी होती है। इसे सस्ता बनाने के प्रयास हो रहे हैं।

4. **पवन :** तीव्र गति से चलने वाले पवन से चक्कियों का निर्माण बहुत पहले से होता आया है। प्रो० हीरोनीमस का विचार है कि अतलांतिक महासागर के किनारों पर पवन-चक्कियों का निर्माण अधिक उपयोगी सिद्ध होगा।

5. **भूगर्भ तथा समुद्र गर्भ :** समुद्र और पृथ्वी के नीचे कम गहराई पर ही कहीं-कहीं गर्म धाराओं के सोते विद्यमान हैं। इटली में तो 1913 ई० से इनसे विद्युत प्राप्त की जा रही है। न्यूज़ीलैण्ड तथा अन्य देशों में भी इन स्रोतों से ऊर्जा प्राप्त करने का प्रयास किया जा रहा है। प्रदूषण रहित, सहज एवं सस्ती शक्ति का यह स्रोत ऊर्जा-संकट के निवारण में प्रमुख योगदान दे सकता है। कैलीफोर्निया की इम्पीरियल वैली में गर्म धारा के अनेक सोते हैं। यदि इनसे विद्युत प्राप्त की जावे तो समस्त कैलीफोर्निया की ऊर्जा-आवश्यकता की पूर्ति संभव है।

6. **सौर शक्ति :** सूर्य समस्त शक्तियों का स्रोत है। यदि पृथ्वी की विभिन्न इकाइयों से प्राप्त शक्तियों को जोड़ा जाय तो सूर्य उससे भी 100,000 गुनी अधिक ऊर्जा प्रतिदिन पृथ्वी को देता है। उन्नत देशों में वैज्ञानिक इस शक्ति को सस्ती तथा सहज रूप में प्राप्त करने के लिये प्रयास कर रहे हैं। शक्तिशाली परिवर्तकों की सहायता से सूर्य से ऊर्जा प्राप्त करना सम्भव हो सका है।

(स) कृषि विकास के लिये

1. **सिंचाई :** विज्ञान की सहायता से कृषि को सुदृढ़ बनाना सबसे आवश्यक कदम रहा है। कृषि के लिये सबसे पहली आवश्यकता पर्याप्त जल की उपलब्धि है। जहाँ जल का अभाव रहता वहाँ किसी नदी पर बाँध बनाकर नदी से नहरों द्वारा जल लाने की व्यवस्था की जाती थी। विशाल बाँधों का निर्माण तकनीकी-ज्ञान की ही देन है। जहाँ नहर से भी पानी पहुँचाना संभव नहीं था वहाँ उसने नलकूपों का निर्माण किया।

2. **भूमि की जाँच :** भूमि के जाँच सम्बन्धी परीक्षणों से यह पता लगाना संभव हो सका है कि किस भूमि में किस तरह की उपज अच्छी हो सकती है तथा किस तरह की खाद अच्छी फसल प्राप्त करने में सहायक होगी।

3. **वानस्पतिक प्रयोग :** वनस्पति शास्त्र के अनुसन्धानों से उत्तम किस्म के पौधे, बीज इत्यादि संभव हो सके हैं। संकर बीजों के द्वारा अधिक उपज प्राप्त हो सकी है।

4. **तकनीकी-ज्ञान का प्रभाव :** कृषि के क्षेत्र में उन्नत तकनीक से अनेक कृषि उपकरणों, ट्रैक्टरों, मशीनों आदि का निर्माण किया गया है। विकसित देशों में तो खेती का सारा काम—यथा जोतना, बोना, ओसाना, निराई, कटाई आदि मशीनों से होने लगा है। विकासशील देशों में भी यह धीरे-धीरे संभव हो रहा है। आज का कृषक हर संभव एवं उपलब्ध वैज्ञानिक उपकरण के प्रयोग करने का प्रयास कर रहा है।

उक्त सब लक्ष्यों से हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सके हैं कि अन्न के क्षेत्र में विश्वव्यापी हरित क्रान्ति विज्ञान के कारण ही सम्भव हो सकी है।

(द) औद्योगीकरण के क्षेत्र में विज्ञान

उद्योगों के क्षेत्र में टेकनालाजी का महत्वपूर्ण योगदान रहा है। कुछ वर्ष पहले तक, विकासशील देशों में, मनुष्य प्रत्येक कार्य को शारीरिक श्रम से करता था। आज वह अधिकांश कार्य मशीनों की सहायता से करने लगा है जिससे कम समय में, कम श्रम से सस्ती तथा अधिक अच्छी वस्तुयें मिल रही हैं। इलेक्ट्रानिकी का विकास औद्योगीकरण में विशेष रूप से सहायक रहा है। विकसित देशों के सन्दर्भ में तो आज का समय 'इलेक्ट्रानिकी-युग' कहा जा सकता है। कम्प्यूटर, जो इलेक्ट्रानिकी की अमूल्य देन है, और एक से एक बड़े प्रश्न का तत्क्षण हल निकाल देता है उसका प्रभाव हर बड़े उद्योग पर स्पष्ट दीखता है। उन्नत टेकनालाजी ने अधिक उत्तम मशीनें, अनेक अच्छे यन्त्र, तीव्र यातायात के साधन प्रदान किये हैं जिससे कि कच्चा तथा बना हुआ माल एक जगह से दूसरी जगह भेजना संभव हुआ और औद्योगीकरण अपनी चरम सीमा पर पहुँच रहा है।

ज्ञान के क्षेत्र में विज्ञान

मनुष्य आदि काल से ज्ञान की खोज में लगा रहा है। उस समय मात्र तर्क का सहारा था। आधुनिक विज्ञान तर्क, अवलोकन तथा प्रयोगों पर आधारित है और क्रमबद्धता पर विश्वास रखता है। वह मानव की अनेक गूढ़ समस्याओं के हल प्रस्तुत करने में सफल रहा है।

आज भी दार्शनिक और वैज्ञानिक अनेक उत्कंठाओं के समाधान में तल्लीन हैं, जैसे ब्रह्माण्ड में जीव का अभ्युदय, अन्य ग्रहों में जीव का अस्तित्व, जीवन क्या है, मृत्यु क्या है, आदि।

विज्ञान का इतिहास बताता है कि हर वैज्ञानिक उपलब्धि का आधार मूलभूत विज्ञान रहा है। खगोल विज्ञान आज भी 500 साल पूर्व निर्दिष्ट कोपर्निकस के सिद्धान्त को जिसमें सूर्य को स्थिर एवं अन्य ग्रहों को उसकी प्रदक्षिणा करते हुए बताया गया था, आधार मानकर यथोचित महत्व दिया जाता है। न्यूटन के द्वारा प्रस्तुत यांत्रिकी के सिद्धान्त आज भी यान्त्रिकी एवं तान्त्रिकी में आधारभूत हैं। मेन्डेल एवं डार्विन के सिद्धान्त आधुनिक विज्ञान के इतिहास में अमिट छाप छोड़ गये हैं। हर्ट्ज़ एवं मैक्सवेल के शोध कार्य मारकोनी के दूर संचार प्रयोगों को सफल बना सके हैं। प्रसिद्ध वैज्ञानिक ओम का अत्यन्त सरल सिद्धान्त, कि विद्युत धारा एवं उसके द्वारा किसी अवरोधक पर जनित विभव के बीच सम्बन्ध रहता है, आज इलेक्ट्रानिकी तथा वैद्युत प्रयोगों का प्राण है।

अतः सूक्ष्मअवलोकन से यह स्पष्ट हो जाता है कि मूलभूत अनुसन्धान एवं उनसे प्रतिपादित सिद्धान्त का समाज पर प्रत्यक्ष प्रभाव भले न पड़े परन्तु जब वे ही सिद्धान्त व्यावहारिक रूप में प्रयोग एवं अवलोकन द्वारा पुष्ट होते हैं तो उनकी उपयोगिता दृष्टिगत होती है। इस तरह के अनुसन्धानों में वस्तुतः आकस्मिक रूप से हर्ष, नैराश्य, विनोद आते रहते हैं। आज विश्व का प्रबुद्ध समाज मूलभूत अनुसन्धान के प्रति सजग है। विकसित देशों में सैद्धान्तिकी अनुसन्धान के स्कूल खोले जा रहे हैं क्योंकि इनसे ही ज्ञान का विकास होता है जो कालान्तर में तकनीकी विकास के नये मार्ग खोलते हैं।

भारत में विज्ञान

ज्ञान का महत्व हमारे यहाँ आदि काल से रहा है। उन दिनों ज्ञानार्जन के लिये बच्चों को आश्रमों में भेजा जाता था जहाँ वे विभिन्न विषयों में पारंगत ऋषियों के पास अपने जीवन के प्रथम

पच्चीस वर्ष बिताते थे। यहाँ बच्चों को गुरुकुल प्रणाली के अनुसार ज्ञान दिया जाता था तथा विभिन्न गूढ़ समस्याओं पर चिन्तन भी करवाया जाता था।

1600 से 800 ई०पू० का काल वैदिक काल कहलाता है। उस समय के अनेक तथ्य आज भी विद्यमान हैं जो यह बताते हैं कि तात्कालिक भारत में चिकित्सा, भौतिकी, रसायन, वनस्पतिशास्त्र, गणित आदि का सदुपयोग समाज के लिये होता था।

600 ई० पू० अर्थेया तक्षशिला में तथा सुश्रुत वाराणसी विश्वविद्यालय में चिकित्सा विज्ञान पढ़ाते थे। 300 ई० पू० से 100 ई० तक के युग में अर्थशास्त्र के अन्तर्गत खदानों का, धातुविज्ञान का, सोने एवं चाँदी के शुद्ध रूप में प्राप्त करने की विधियों का वर्णन मिलता है। गणित का विकास भारत में 5वीं से 12वीं शतीं तक हुआ। आर्यभट्ट 5वीं शती में एक बहुत बड़े गणितज्ञ हो चुके हैं। उन्होंने वर्गमूल, घनमूल, त्रिभुज का क्षेत्रफल आदि का प्रयोग अपने अध्ययन में किया। π का मान भी उन्होंने ही 3·1416 रक्खा। राजा सवाई जयसिंह द्वितीय ने खगोल शास्त्र के अध्ययन के लिये अनेक वेधशालाएँ स्थापित की थीं। इनमें जिन उपकरणों का प्रयोग किया जाता था उनमें अक्षांश-देशांतर का विचार रक्खा गया था तथा अनेक रेखागणित के सिद्धान्तों का प्रयोग किया गया था।

किन्तु उक्त समस्त शोधों से समाज को विशेष लाभ न हो सका। ये अपने वास्तविक रूप में समाज तक नहीं आ सकीं। इन कार्यों से उपलब्ध विचार एवं परिणाम विद्वानों तक ही सीमित थे अतः इनमें विकास के बजाय पतन ही होता रहा। जनसाधारण तक ये विचार न पहुँच पाने के कारण ग्रन्थों में कथा के रूप में लिखे के लिखे रह गये।

भारत में आधुनिक विज्ञान का उदय अंग्रेजों के आगमन के बाद हुआ। अंग्रेज सरकार ने अपने लाभ के लिये सर्वेक्षण विभाग 1767, भूसर्वेक्षण विभाग (Geological Survey) 1851, एवं भारतीय मौसम विभाग (Indian Meteorological Department) 1875 ई० में खोला। विज्ञान की शिक्षा एवं अनुसन्धानों के प्रति जागृति नहीं थी। प्रथम महायुद्ध के अन्त तक 7 विश्वविद्यालय थे जिनमें विज्ञान के प्रशिक्षण की सुविधाएँ नगण्य थीं। द्वितीय महायुद्ध के समय भारत का सम्पर्क अन्य विकसित देशों से टूट गया था अतः बाध्य होकर अंग्रेज सरकार को भारत में विज्ञान एवं टेकनालाजी सम्बन्धी संस्थाएँ बनाने का विचार करना पड़ा। सन 1942 में वैज्ञानिक एवं अनुसन्धान परिषद CSIR की स्थापना हुई।

स्वतन्त्रता के बाद तो विज्ञान की प्रगति तीव्र गति से संभव हो सकी है। पंडित जवाहर लाल नेहरू ने, जो विज्ञान एवं टेकनालाजी के विकास के महत्व को जानते थे, आधुनिक तीर्थ स्थलों की स्थापना करनी प्रारम्भ की। ये ही संस्थाएं आज भारत में विज्ञान एवं तकनीकी विकास के लिये प्रयत्नशील हैं। उनमें से प्रमुख सस्थाएँ निम्नांकित हैं :—

1. वैज्ञानिक एवं अनुसन्धान परिषद (CSIR) : इसके अन्तर्गत 44 प्रयोगशालाएँ हैं जो विविध विषयों पर अनुसन्धान कर रही हैं।
2. अणुशक्ति विभाग (Atomic Energy Commission)

3. रक्षा अनुसंधान एवं प्रगति संस्थान (Defence Laboratories)
4. भारतीय चिकित्सा अनुसन्धान परिषद
5. भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद
6. भारतीय मौसम विभाग, केन्द्रीय जल एवं विद्युत विभाग
7. सर्वेक्षण, भूसर्वेक्षण, पशु सर्वेक्षण, वनस्पति सर्वेक्षण-आदि ।

इन सभी संस्थाओं में वैज्ञानिक, तकनीकी एवं अन्य प्राविधिक व्यक्ति दस लाख से ऊपर हैं । मात्र अनुसन्धान क्षेत्र में 75,000 से अधिक व्यक्ति हैं । यह संख्या सन् 1961 की तुलना में दो गुनी है । सन् 1948 में अनुसन्धान एवं विकास कार्यों पर 3.7 करोड़ रुपये खर्च हुये किन्तु आज यही राशि बढ़कर सन् 1972 में 214 करोड़ रुपये हो गयी है । विभिन्न क्षेत्रों में विज्ञान का प्रभाव इस प्रकार देखा गया है:—

कृषि के क्षेत्र में : इस क्षेत्र में आत्मनिर्भर बनने के हर संभव प्रयास किये गये । अनेक बाँध, नहरें, नलकूप बनाकर सिंचाई व्यवस्था की गयी । कृषकों को उत्तम बीज, उत्तम खाद तथा अन्य अनेक सुविधाएँ प्रदान की गयीं । लगभग 40 वर्ष पूर्व 4,000 गाँवों में बिजली थी, आज 60,000 गाँवों में बिजली पहुँच चुकी है । इससे विद्युत मशीनों का प्रचलन अधिक हो रहा है जिससे सिंचाई व्यवस्था में सुधार हुआ है । वैज्ञानिक विधि से कृषि करने के लिये भी शिक्षा दी जा रही है ।

उद्योगों के क्षेत्र में : तकनीकी ज्ञान के विकास पर पूरा-पूरा ध्यान दिया गया है । 1947 ई० की तुलना में इंजिनियरों की संख्या 5 गुना और मशीनों का उत्पादन 100 गुना अधिक बढ़ा है । अनेक वस्तुएँ, जैसे रेल के इंजिन, डिब्बे, इस्पात की बनी अनेक वस्तुएँ, विभिन्न इलेक्ट्रानिक उपकरण आदि के क्षेत्रों में हम न केवल स्वावलम्बी हुये हैं अपितु इनका निर्यात भी कर सके हैं, अपने न्यूक्लियर रिएक्टरों के लिये ईंधन भी जुटा सके हैं, अच्छे ट्रैक्टर, अन्य कृषि उपकरण आदि भी बना सके हैं, रक्षा सम्बन्धी अनुसन्धानों की सहायता से जेट एच-एफ 24, रडार, प्रक्षेपास्त्र, कम्प्यूटर आदि अनेक उपकरण और मशीनें बना सके हैं ।

चिकित्सा के क्षेत्र में : हर व्यक्ति को सहज रूप से चिकित्सा सुविधा उपलब्ध कराने का भी प्रयास किया गया । हर बड़े कस्बे में चिकित्सालय खुल गये हैं । मलेरिया, हैजा आदि रोगों का निवारण सम्भव हो सका है ।

जनसंख्या वृद्धि की समस्या : हमारे लिये यह आज सबसे बड़ी समस्या है । जनसंख्या वृद्धि तथा आवश्यक सामग्री की उपलब्धि का अनुपात अत्यन्त असन्तुलित है अतः अधिकांश व्यक्ति अपनी आवश्यकता की चीजें भी नहीं जुटा पाते । इस समस्या के निदान के लिये परिवार नियोजन कार्यक्रम से जनसाधारण को अवगत कराया जा रहा है । निम्नांकित ध्येयों को समक्ष रखकर विज्ञान के कार्यक्रम किये जा रहे हैं :—

(1) पृथ्वी के गर्भ में स्थित प्राकृतिक सम्पदाओं का पता लगाना और उनका उचित उपयोग करना ।

(2) रक्षा, कृषि, चिकित्सा, ऊर्जा आदि के क्षेत्रों में भारत को आत्म निर्भर बनाना ।

(3) प्राकृतिक विपदाओं पर नियन्त्रण और उनके उपस्थित हो जाने पर निवारण में सहयोग ।

(4) समाज को आधारभूत वस्तुएँ सरलता से प्राप्त कराने में सहायता पहुँचाना ।

उक्त ध्येयों की पूर्ति के लिये देश की वैज्ञानिक प्रतिभा को बढ़ाना आवश्यक है । हमारे यहाँ वैज्ञानिकों में प्रतिभा एवं दक्षता की कमी नहीं है परन्तु खेद इस बात का है कि हमारे राजनीतिज्ञों तथा उच्च कर्मचारीगणों में वैज्ञानिकों के प्रति विश्वास की कमी है । यही कारण है कि वैज्ञानिक आत्म-निर्भरता कराने में पूर्णतः सहायक नहीं हो सके हैं ।

पंडित जवाहर लाल नेहरू सदैव इस बात के लिये प्रयत्नशील रहते थे कि हर क्षेत्र की प्रगति वैज्ञानिक तरीके से हो । उन्होंने ही विज्ञान को गाँवों मे ले जाने की बात कही थी जिससे हमारी अधिकांश जनता विज्ञान से प्राप्त उपलब्धियों का सही सही उपयोग कर सके । आज भी हमारे यहाँ विज्ञान के समुचित प्रसार की नितान्त आवश्यकता है । हमें विभिन्न वैज्ञानिक गतिविधियों को अपने कृषक भाइयों को सरल भाषा में रेडियो द्वारा समझाना चाहिये । सरल भाषाओं में अनुवाद कार्य को प्रोत्साहन मिलना ही चाहिए जिससे जन-साधारण में विज्ञान के प्रति लगाव उत्पन्न हो सके । विज्ञान के पठन-पाठन में भी प्रगति के अनुसार सामयिक परिवर्तन आवश्यक हैं ।

जब हम अपने पिछले पांच-सात सालों की प्रगति पर दृष्टि डालते हैं तो स्पष्ट पता चलता है कि श्रीमती इन्दिरा गान्धी ने न केवल अपने पिता के विचारों का समर्थन कर विज्ञान को सामाजिक तथा आर्थिक विकास के लिये उपयोगी समझा वरन् द्रुत विकास के लिये समयोचित कदम भी उठाये हैं । उन्होंने ही 1971 ई० में विज्ञान एवं तकनीकी विकास के लिये एक सलाहकार समिति बनाई जिसका नाम National Committee on Science and Technology रखा । इसमें विभिन्न क्षेत्रों से दस प्रमुख वैज्ञानिक और तकनीकी विशेषज्ञ चुने गये । इन्होंने 1,700 अन्य वैज्ञानिक, तकनीकी विशेषज्ञ, उद्योगपति, अर्थशास्त्री और शिक्षाविदों आदि का सहयोग लेकर पंचम पंचवर्षीय योजना में विज्ञान की नीतियों पर इन कार्यक्रमों पर व्यय होने वाले बजट पर विचार कर अपनी रिपोर्ट सरकार को दी और हर्ष का विषय है कि योजना आयोग ने भी इन रिपोर्टों को यथोचित महत्व दिया है । पंचम पंचवर्षीय योजना में विज्ञान एवं टेकनालाजी पर 9,033.3 करोड़ रुपया व्यय करने की योजना बनाई गई है । यह राशि चतुर्थ पंचवर्षीय योजना के लिये निर्धारित व्यय की राशि से छः गुनी अधिक है ।

विज्ञान की इस राष्ट्रीय समिति ने जो भी सुझाव सरकार को दिये हैं और उसके लिये जो भी राशि सुझायी गई है उसमें प्रयत्न यही किया गया है कि हम कृषि, आर्थिक विकास, प्राकृतिक सम्पदाओं तथा तकनीकी के क्षेत्र में आत्म निर्भर हो सकें । उक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि आज सरकार तथा जनता दोनों विज्ञान के समयोचित उपयोग के लिये सजग हैं ।

विज्ञान के भावी चरण

प्राकृतिक सम्पदाओं का विकास : हमारी बहुमुखी प्रगति के लिये आवश्यक है कि हम प्राकृतिक सम्पदाओं का विकास करें । अभी तक पूरे क्षेत्रफल का भू-सर्वेक्षण नहीं हो पाया है अतः भू-सर्वेक्षण

को प्राथमिकता देना नितान्त ग्रावश्यक है। इससे हम न केवल ऊर्जा के नये स्रोत (कोयला, तेल, गैस ग्रादि) खोज पायेंगे बल्कि नयी धातुग्रों के भंडार भी खोज सकेंगे।

ग्राज भू-भौतिकी के शोध कार्यों से ग्रधिक गहराई में छिपे ऊर्जा स्रोत, धातु भण्डारों का पता लगाना संभव हो सका है। साथ ही बढ़ती हुई धातु की माँग की पूर्ति के लिये कम धातु वाले खनिजों का खनन भी ग्रावश्यक हो रहा है। भू-भौतिकी उपकरणों से यह भी ज्ञात हो सकता है कि किसी स्थान पर पानी कितनी गहराई पर होगा। यह पानी के ग्रकालग्रस्त इलाकों में वरदान सिद्ध हो रहा है। इस गतिविधि से सबको ग्रवगत कराना ग्रावश्यक कदम होगा।

भूकम्प, ज्वालामुखी ग्रादि का ग्रध्ययन पृथ्वी के गर्भ में निहित वस्तुग्रों की जानकारी के लिये उपयोगी साधन सिद्ध हो रहा है। इन भूकम्पों, विस्फोटों के ग्रवलोकनों से प्राकृतिक सम्पदाग्रों की खोज भी सम्भव हो सकी है। राष्ट्रीय भू भौतिकी ग्रनुसन्धान संस्थान हैदराबाद (National Geophysical Research Instt., Hyderabad) में भूकम्प की भविष्यवाणी करने के सम्बन्ध में शोध कार्य जारी है। सफल होने पर निःसन्देह जान-माल की हानि बचाई जा सकेगी।

वायुयान से किया गया भू-भौतिकी सर्वेक्षण उपयोगी सिद्ध हो रहा है। राष्ट्रीय भू-भौतिकी अनुसन्धान संस्थान हैदराबाद ने भारतीय प्रतिभा एवं स्वनिर्मित उपकरणों का उपयोग करके भारत के विभिन्न क्षेत्रों का सर्वेक्षण किया है। इससे काफी मात्रा में विदेशी मुद्रा बची है। इन सर्वेक्षणों से धातु, खनिज, तेल ग्रादि के बारे में खोज करने में सहायता मिलेगी।

वर्तमान स्थिति में इस क्षेत्र को उचित प्रोत्साहन देना ग्रत्यावश्यक है।

कृषि के क्षेत्र में : वनस्पति विज्ञान के शोध-कार्यों को प्रोत्साहन मिलना ग्रावश्यक है। इनकी सहायता से ही एक ही साल में दो या तीन फसलें ली जानी संभव हो सकेंगी। कृत्रिम वर्षा को संभव बनाना ग्रावश्यक है। इससे हमें मानसून पर निर्भर नहीं रहना पड़ेगा। फसलों को होने वाली बीमारियों का निवारण होना ग्रत्यावश्यक है। इससे ग्रधिक अन्न पैदा करना भी संभव होगा। भूमि जाँच के ग्रनुसन्धानों से ग्राशा बंधने लगी है कि उन स्थानों पर भी फसलें उगाई जा सकेंगी जहाँ पर ये ग्रभी तक नहीं उगती हैं।

इलेक्ट्रानिकी का विकास : इलेक्ट्रानिकी का ग्रधिक प्रचलन और विकास ग्रौद्योगीकरण के विकास में ग्रत्यन्त प्रमुख भूमिका होगी। कम्प्यूटरों का ग्रधिक प्रचलन और प्रयोग आर्थिक विकास की दिशा में सहायता देगा। हर जरूरतमन्द को कम्प्यूटर मिल सके इसलिये लघु कम्प्यूटर बनाना उचित होगा। रेडियो, टेलीविज़न ग्रादि शिक्षा विकास के लिये उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं अतः इनका विकास भी ग्रावश्यक कदम होगा।

समुद्र का अध्ययन

समुद्र पृथ्वी की सतह का अधिकांश भाग घेरे हैं। ग्राज वे भी वैज्ञानिकों के लिये रहस्य बने हुये हैं। ग्रन्तरिक्ष से लिये गये समुद्रों के चित्र ग्रत्यन्त रोचक हैं। इनसे समुद्र की विस्तृत जानकारी प्राप्त करने में सुविधा होगी। समुद्र का अध्ययन तैरती हुई बर्फ शिलाग्रों की गति

व दिशा का पता लगाने के लिये (जिससे सामुद्रिक दुर्घटनाएँ कम हो सकें) सहायक हो रहा है। समुद्री तल का अध्ययन भू-भौतिकी प्रक्रियाओं जैसे भूकम्प, ज्वालामुखी पर्वतों का निर्माण, महाद्वीपों की विभिन्न समयों में स्थिति आदि की विस्तृत जानकारी के लिये उपयोगी सिद्ध हो रहा है।

हमारे लिये हिन्द महासागर का अध्ययन आवश्यक है क्योंकि इससे आने वाले मानसूनों पर हमारी कृषि निर्भर है। वहाँ से हमें अनेक उर्वरक, खनिज, तेल, मछली आदि की प्राप्ति भी हो सकेगी। हमारे उद्योगों के लिये आयात-निर्यात भी इन्हीं से होता है। हिन्द महासागर के तल का अध्ययन अनेक सिद्धान्तों के प्रतिपादन या खण्डन आदि के लिये उपयोगी हो सकता है।

अन्तरिक्ष अनुसन्धान

मानव की अन्तरिक्ष विजय, सम्भवतः मानव की सबसे बड़ी उपलब्धियों में से एक है। चन्द्रमा पर मानव का अवतरण अनेक भ्रान्तियों का उन्मूलन कर सका है। अन्तरिक्ष से लिये गये चित्र पृथ्वी, समुद्र, अन्य ग्रहों के विस्तृत अध्ययन के लिये उपयोगी सिद्ध हो रहे हैं। मौसम का अध्ययन अन्तरिक्ष से हो सकने पर अनेक प्राकृतिक प्रकोपों से बचा जा सकेगा। फसलों का, उन पर लगने वाली बीमारियों का अध्ययन अन्तरिक्ष से अधिक अच्छा हो पावेगा। यह क्षेत्र यद्यपि नवीन है परन्तु अनेक क्षमताओं से युक्त है। विकसित देशों के लिये यह एक अत्यन्त उपयोगी विज्ञान की शाखा सिद्ध हो रही है।

भारत में विज्ञान एवं टेकनालाजी : नीति-निर्धारण : कुछ सम्बन्धित उत्कंठाएँ

आज से 30 वर्ष बाद के भारत की कल्पना करते समय हमें उन नीतियों के बारे में सोचना आवश्यक है जिनसे हमारे स्वप्न सत्य सिद्ध होगें। यह सर्वविदित है कि हमारे यहाँ आज भी हर काल की सामाजिक अवस्थाएँ विद्यमान हैं। मानव हर स्तर पर जीवन-यापन कर रहा है। खेद के साथ कहना पड़ता है कि अभी भी अधिकांश जनता पिछड़ी हुई है। वह अपनी दैनिक और मूलभूत आवश्यकताओं की पूर्त्ति ठीक से नहीं कर पा रही है। क्या उक्त बातों का ध्यान हमें नीति-निर्धारण करते समय नहीं करना है? क्या हमारे लिये अन्तरिक्ष अनुसन्धान, न्यूक्लियर रिएक्टर, सूक्ष्मजैविकी आदि के क्षेत्र ही प्राथमिकता रखते हैं? क्या हमें रक्षा अनुसन्धानों पर अपनी सीमित राष्ट्रीय आय का अधिकांश व्यय करना चाहिये? हम गरीब हैं तो क्या हमें उन सभी प्रस्तावों या विकल्पों को मान लेना चाहिए जिससे हमें लाभ ही लाभ दृष्टिगोचर हो रहे हों—भले भविष्य में वे व्यर्थ सिद्ध हों? क्या हमें विदेशी टेकनालाजी को मात्र सीखकर उसमें आवश्यकतानुसार विकास या परिवर्तन करते रहना चाहिये या सदैव विदेशी टेकनालाजी, विदेशी माल एवं विदेशी मशीनों पर आधारित व निर्भर रहना चाहिये? यदि हम पर कोई नया दायित्व आता है तो निःसन्देह त्रुटियाँ होने की भी संभावना है, उनसे सबक सीखकर आत्मनिर्भरता की ओर जाना उचित कदम होगा? या चूँकि हम त्रुटियाँ करेगें, इसलिये हमें कोई उत्तरदायित्व निभाना ही नहीं चाहिये, ऐसी भावना फलदायक होगी?

हमारे लिये यही उचित समय है कि इन बातों की ओर ध्यान दें तथा इन प्रश्नों का उत्तर ढूँढ निकालें। इसमें दो रायें नहीं हैं कि उन्नत टेकनालाजी ने हमारे सामने सामग्रियों की खपत के लिये, याता-

यात साधन तथा अन्य अनेक व्यक्तिगत स्तर की सुविधाएँ व उनके विकल्प भी दिये हैं। यदि इनका समयोचित उचित उपयोग नहीं हुआ तो निःसन्देह समाज पर विपरीत प्रभाव पड़ सकता है।

हमारे विकास की गति को त्वरित व सही दिशा प्राप्त कराने में हमारी विज्ञान-नीति निर्धारण समस्या प्रमुख भूमिका निभाने वाली है। आज हमारे लिये उन बातों की ओर अभी से ध्यान देना आवश्यक है जिनसे हमारी आनी वाली पीढ़ियाँ सुखी और सम्पन्न हो सकें।

उपसंहार

आज भी हम देखते हैं कि विज्ञान ने सामाजिक जीवन के हर पहलू को प्रभावित कर रक्खा है। व्यक्ति की आवश्यकता-पूर्ति के लिये विज्ञान ने हर संभव प्रयास किये हैं। विज्ञान के चमत्कार समाज के अंग बन रहे हैं। आज विश्व का शायद ही कोई व्यक्ति हो जो चन्द्रमा पर मानव अवतरण, रेडियो, वायुयान, बम, घड़ी आदि के बारे में न जानता हो। परन्तु क्या यह सत्य नहीं है कि विज्ञान का उचित या अनुचित उपयोग करना मानव के हाथों में है। अभी तक हमने विज्ञान के एक ही पक्ष की चर्चा की। दूसरा एवं अत्यन्त भयानक पक्ष तो सन् 1945 से समाज को सदैव अपनी विकरालता का ध्यान दिलाता रहता है। हिरोशिमा और नागासाकी जैसे विशाल औद्योगिक नगरों का विज्ञान की विभीषिका का शिकार होना, समस्त विज्ञान के वरदानों को कलंक लगा देता है। मानव का स्वभाव अन्वेषणों से सम्बन्धित है। परमाणु विखण्डन से ऊर्जा प्राप्त करना एक महान वैज्ञानिक उपलब्धि मानी जा सकती है परन्तु इस ऊर्जा का विध्वंसक बमों के रूप में प्रयोग करना समाज के साथ घोर अन्याय है। विकासशील देशों के लिये तो ऐसी विचारधारा ही वर्जित है। एक 500 मेगाटन के बम में जितना व्यय होता है उससे 10,000 रोगियों को रोगों से मुक्ति दिलाई जा सकती है। विज्ञान की इन उपलब्धियों के कारण ही आज विश्व सदैव युद्ध के कगार पर खड़ा है।

वस्तुतः मानव समाज को इस समय और अधिक वैज्ञानिक उपकरणों और उपलब्धियों की अपेक्षा अपने बीच वैज्ञानिक भावना उत्पन्न करना अधिक आवश्यक है। विभिन्न स्तरों पर जीवन-यापन कर रहे मानव को एकसमान स्तर पर ला देना अधिक श्रेयस्कर कदम होगा। कितनी बड़ी विडम्बना है कि मानव चन्द्र तल पर पहुँच गया, समुद्र की गहराइयाँ नाप आया, परन्तु एक मानव दूसरे मानव को नहीं समझ पाया। आज सामाजिक सुधारकों, राजनीतिज्ञों तथा वैज्ञानिकों को मिलकर सर्वप्रथम मानव के बीच की दूरी को पाटना है अन्यथा भय है कि मानव समाज पुनः प्रस्तर युग की ओर प्रस्थान न कर जावे।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January 1974, Pages 13-16

इन्डियम (III) लैक्टेटों का निर्माण एवं स्थायित्व

पी० बी० चक्रवर्त्ती तथा एच० एन० शर्मा
रसायन विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अगस्त 29, 1973]

सारांश

एक-परिवर्तन (मोनोवेरिएशन) विधि द्वारा सम्पन्न विभवमापी अध्ययन से विलयन में, इन्डियम (III) तथा लैक्टिक अम्ल के मध्य 1:1, 1:2 तथा 1:3 कीलेटों का निर्माण प्रकट होता है। 0·1 M सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में 30° से० पर इन कीलेटों के स्थायित्व-स्थिरांक जेरम की विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। $\log k_1$, $\log k_2$ तथा $\log k_3$ के मान निर्माण-वक्र से $\bar{n}=0{\cdot}5$, 1·5 तथा 2·5 पर $p[L]$ के मानों से प्राप्त करने पर क्रमशः 3·65, 3·32 तथा 2·95 प्राप्त हुये।

Abstract

Formation and stabilities of In(III)-lactates. *By* P. B. Chakrawarti, Chemistry Department, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal and H. N. Sharma, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

Potentiometric study employing monovariation method shows the formation of 1:1, 1:2 and 1:3 chelates between In(III) and lactic acid in solution. The stability constants of these chelates in 0·1 M sodium perchlorate medium at 30°C have been calculated by Bjerrum's method. The values of $\log k_1$, $\log k_2$ and $\log k_3$ are directly obtained from the formation curves from the value of $p[L]$ at $\bar{n}=0{\cdot}5$, 1·5 and 2·5 and are found to be 3·65, 3·32 and 2·95 respectively.

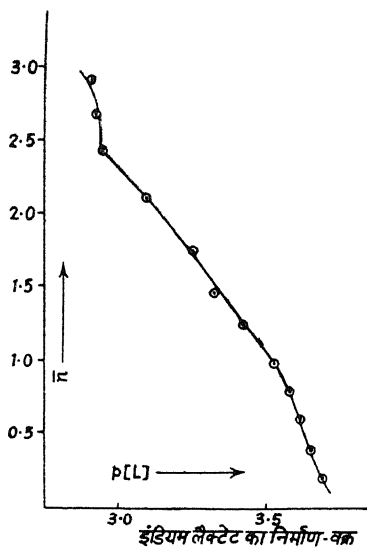
इस प्रयोगशाला में किये जा रहे α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के कुछ धातु आयनों के साथ बनने वाले कीलेटों के अध्ययन-क्रम में प्रस्तुत प्रपत्र में[1-3] लैक्टिक अम्ल के साथ बनने वाले इन्डियम (III) के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन और उनके स्थायित्व-स्थिरांकों का परिकलन विभवमापी विधि[4,5] द्वारा दिया जारहा है।

A 2

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त सामग्री—लैक्टिक अम्ल [रोडिया रोन पॉलेन्क (फ्रांस)], इन्डियम सल्फेट [शुचार्ड्ट, मचेन], परक्लोरिक अम्ल [रीडेल], सोडियम परक्लोरेट [रीडेल], सोडियम हाइड्रॉक्साइड [मर्क] के विलयन कार्बन डाइऑक्साइड से मुक्त शुद्ध आसुत जल में बनाये गये तथा उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों द्वारा किया गया। पी-एच मापन के लिये 'सिस्ट्रोनिक्स' नं० 322 पी-एच मापी का उपयोग किया गया है और सारे अनुमापन स्थिरतापी में $30 \pm 0{\cdot}1°$ से० पर किये गये हैं।

भारश: अनुपातमिति—लैक्टिक अम्ल से बनने वाले In(III) के कीलेटों में धातु आयन तथा लीगैंड अणु के अनुपात के निर्धारण के लिये पाण्डे तथा नायर[4] की एकपरिवर्तन विधि का उपयोग करते हुये विभवमापी [पी-एच] अनुमापन किये गये। अनुपात-अनुमापन बताते हैं कि विलयन में In (III) तथा लैक्टिक अम्ल 1:1, 1:2 तथा 1:3 कीलेट बनाते हैं और इनके निर्माण के समय क्रमश: एक, दो तथा तीन प्रोटॉन मुक्त होते हैं।

स्थायित्व-स्थिरांक—कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों के निर्धारण के लिये जेरम की पी-एच अनुमापन विधि[5] प्रयोग में लायी गयी। सारे अनुमापन 30° से० पर 0·1 *M* सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में किये गये।

चित्र 1.

धातु आयन [In^{3+}] की उपस्थिति एवं अनुपस्थिति में लीगैंड [लैक्टिक अम्ल] के अनुमापनों के लिये अग्रलिखित मिश्रण तैयार किये गये।

(क) 5 मिलि० 0·02 M परक्लोरिक अम्ल +10 मिलि० 0·04 M लैक्टिक अम्ल +4·5 मिलि० 1·0 M सोडियम परक्लोरेट

(ख) मिश्रण (क) +5 मिलि० 0·002 M In^{3+}

प्रत्येक दशा में कुल आयतन 50 मिलि० कर लिया गया। इस प्रकार प्रत्येक विलयन की आयनिक सांद्रता 0·1 M सोडियम परक्लोरेट रखी गयी। इन मिश्रणों को सोडियम कार्बोनेट-मुक्त 0·2 M सोडियम हाइड्रॉक्साइड विलयन द्वारा पी-एच मापी विधि से अलग अलग अनुमापित किया गया। In^{3+} की उपस्थिति तथा अनुपस्थिति में लैक्टिक अम्ल के पी-एच अनुमापन वक्रों के पारस्परिक अंतरों से जेरम विधि द्वारा $\bar{n}$ तथा $p[L]$ की गणना की गयी।

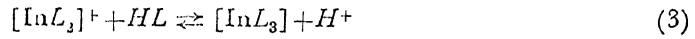
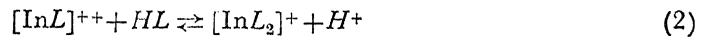
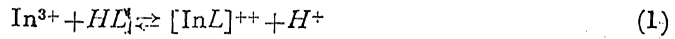
In(III) लैक्टेटों का निर्माण वक्र ($\bar{n}$ तथा $p[L]$ के मध्य) चित्र 1 में प्रदर्शित है।

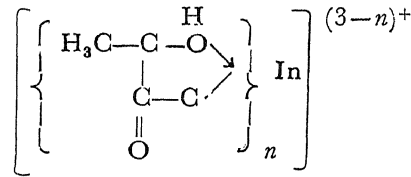
परिणाम तथा विवेचना

पी-एच मापी अनुपात-अनुआपनों द्वारा इंगित तथ्य कि 1:1, 1:2 तथा 1:3 कीलेटों के निर्माण के समय क्रमशः एक, दो तथा तीन प्रोटॉन मुक्त होते हैं, यह स्पष्ट करता है कि लैक्टिक अम्ल अणु के In(III) से कीलेटीकरण के समय इसके केवल कार्बोक्सिल समूह से ही प्रोटॉन मुक्त होता है तथा हाइड्रॉक्सिल समूह का प्रोटॉन अप्रभावित रहता है। अतः, In(III) तथा लैक्टिक अम्ल के मध्य कीलेटीकरण की अभिक्रियाएँ निम्न रूप में लिखी जा सकती हैं।

$$In^{3+} + HL \rightleftharpoons [InL]^{++} + H^{+} \quad (1)$$

$$[InL]^{++} + HL \rightleftharpoons [InL_2]^{+} + H^{+} \quad (2)$$

$$[InL_2]^{+} + HL \rightleftharpoons [InL_3] + H^{+} \quad (3)$$

जहाँ, HL लैक्टिक अम्ल का निरूपण करता है। उपर्युक्त आधार पर, In(III) के साथ लैक्टेट आयन, हाइड्रॉक्सिल एवं कार्बोक्सिल समूहों द्वारा, निम्नांकित रूप में कीलेटित होना चाहिए:

$$\left[\left\{\begin{array}{l} \quad\quad\quad\;\; H \\ H_3C—C—O \searrow \\ \quad\quad\;\; | \quad\quad\quad\;\; In \\ \quad\quad\;\; C—C \nearrow \\ \quad\quad\;\; \| \\ \quad\quad\;\; O \end{array}\right\}_n\right]^{(3-n)+}$$

जहाँ, n=1, 2 या 3 है।

[1:1 तथा 1:2 संकुलों में शेष उपसहसंयोजकता स्थान संभवतः जल के अणुओं द्वारा भरे रहते हैं।]

पी-एच अनुमापनों से प्रकट होता है कि प्रस्तुत निकाय में क्षार की मात्रा बढ़ाने पर अवक्षेपण होने लगता है। यह अवक्षेपण ~ 4·6 पी-एच पर प्रारंभ हो जाता है। अतः, उल्लेखनीय है कि, $\bar{n}$ की

गणना उन्हीं बिन्दुओं तक की गयी है जहाँ तक विलयन पूर्णतः निर्मल थे। जैसा कि चित्र 1 में निरूपित निर्माण-वक्र से स्पष्ट है, प्रस्तुत निकाय में $\bar{n}$ का अधिकतम मान 3 तक ही पहुँचता है जो 1:1, 1:2 तथा 1:3 कीलेटों के निर्माण की पुष्टि करता है।

निर्माण-वक्र से, $n=0{\cdot}5$, $1{\cdot}5$ तथा $2{\cdot}5$ पर $p[L]$ के मानों से परिकलित $\log k_1$, $\log k_2$ तथा $\log k_3$ के मान क्रमशः 3·65, 3·32 तथा 2·95 प्राप्त हुए हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक महत्वपूर्ण सुझावों एवं विभिन्न सुविधाओं के लिये क्रमशः डॉ० पी० बी० खड़ीकर एवं डॉ० एस० एन० कवीश्वर (प्राचार्य, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल) और आर्थिक सहायता के लिये विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के आभारी हैं।

निर्देश

1. चक्रवर्ती, पी० बी० और शर्मा, एच० एन०, **साइंस एण्ड कल्चर (मुद्रणस्थ)**
2. वही **(भेजा गया है)**
3. वही **(भेजा गया है)**
4. नायर, एम० आर० तथा पान्डे, सी० एस०, **प्रोसी० एके० सांइ०**, 1948, **27A**, 286
5. जेरम, जे०, 'Metal Ammine Formation in Aqueus Solutions' **पी० हास एन्ड सन्स, कोपनहैगेन**, 1942.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January 1974, Pages 17-30

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का अम्ल-जलअपघटन

एम० एम० म्हाला तथा सु० स० भाटवडेकर
रसायन विभाग, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—अक्टूबर 30, 1973]

सारांश

इस शोध योजना में 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के अम्ल-जलअपघटन का, हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के माध्यम में, 98° पर, 0·63 – 7*M* परास में, अध्ययन किया गया। अम्ल की सान्द्रता को बढ़ाने से अभिक्रिया के दर-स्थिरांक बढ़ते हैं। 4*M* हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में दर स्थिरांक सबसे अधिक रहता है। आयनिक तीव्रता के आँकड़ों के आधार पर ज्ञात किये गये सैद्धांतिक दर, प्रयोग में प्रेक्षित दरों के सर्वथा अनुकूल हैं। सयुग्मी अम्लीय प्रजातियों के फॉस्फोरस पर जल के द्विअणुक न्यूक्लिओफिलिक आक्रमण द्वारा जल-अपघटन होता है, जिसमें *P*—0 बन्धन का विखंडन होता है। संभावित अभिक्रिया की क्रियाविधि को अधिक सुस्पष्ट बनाने के लिये, कई संकल्पनायें जैसे गतिज कोटि, जुकर-हेमेट की परिकल्पना, बनेट प्राचल, आर्हेनिअस प्राचल विलायक का प्रभाव तथा समगतिकी संबंध का उपयोग किया गया है। इस अध्ययन से पुष्टि होती है कि मोनोऐरिल फॉस्फेटों का जलअपघटन अम्ल द्वारा तभी उत्प्रेरित हो सकता है जब उनके ऐरिल भाग में इलेक्ट्रॉनों को आकर्षित करने वाले प्रतिस्थापी उपस्थित हों।

Abstract

Acid hydrolysis of 2, 4-dichlorophenyl dihydrogen phosphate. *By* M. M. Mhala and S. S. Bhatawdekar, School of Studies in Chemistry, Jiwaji University, Gwalior.

Kinetics of acid hydrolysis of 2,4-dichlorophenyl dihydrogen phosphate has been investigated in the range 0·63 – 7*M* hydrochloric acid at 98°. The rate constant increases with increase in acid concentration and attains optimum value in 4*M* acid. Theoretical rates determined from ionic strength data agree well with the experimentally observed rates. The reaction proceeds with bimolecular nucleophilic

attack of water on phosphorus of the conjugate acid species involving $P-0$ fission. The concepts such as kinetic order, Zucker-Hammett hypothesis, Bunnett parameters, Arrhenius parameters, solvent effect and iso-kinetic relationship have been used to give extra support to probable reaction mechanism. The results support the earlier finding that acid catalysis in mono aryl phosphates occurs only if electron attracting substituents are present in the aryl part.

कार्बनिक फॉस्फेट एस्टरों में से मोनो एस्टरों के जल-अपघटन का गतिज विधियों[1] द्वारा अध्ययन अति आधुनिक है। साधारण एवं प्रबल अम्लीय माध्यमों में, मोनोएस्टरों का रूपांतर सयुंग्मी अम्लीय प्रजातियों में होने के कारण जल-अपघटन अम्ल द्वारा उत्प्रेरित होना चाहिये ऐसा संभावित समझा गया। इस प्रकार की अभिक्रिया ऐल्किल मोनोफॉस्फेट एस्टरों में प्रेक्षित की गयी[2]। परंतु मोनोऐरिल फॉस्फेट में अम्लीय उत्प्रेरण के अनुमान की संभावना कम होने का कारण ऐरिल समूह के ध्रुवीय प्रभाव द्वारा, ऐल्किल समूह के ध्रुवीय प्रभाव के विपरीत, एस्टर आक्सीजन की क्षारकता को कम करना है। संभावना के अनुसार फेनिल और *p*-टॉलिल आर्थोफास्फेट[2] में अम्लीय उत्प्रेरण नहीं है। परंतु ऐसे ऐरिल फास्फेट जिनमें *p*-स्थान पर इलेक्ट्रानों को आकर्षित करने वाले प्रतिस्थापी उपस्थित हों, अम्लीय उत्प्रेरण दर्शाते हैं। यह एक असाधारण आचरण है। इस अम्लीय उत्प्रेरण के अनुमान का कारण अज्ञात स्वभाव वाले विद्युत-अपघटनी बलों[3] का होना है।

कई मोनोऐरिल फॉस्फेट एस्टरों का, जिनके ऐरिल भाग में इलक्ट्रॉनों को आकर्षित करने वाले क्रमिक ध्रुवता के प्रतिस्थापी उपस्थित थे, अध्ययन किया गया। इन प्रतिस्थपियों को, अम्लीय उत्प्रेरण पर प्रभाव के आधार पर फॉस्फेट एस्टरों को निम्न क्रम[4,5] में रखा गया।

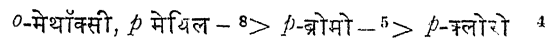
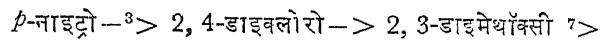
नाइट्रो- > ऐसीटिल- > क्लोरो- > ब्रोमो-

p-क्लोरोफेनिल फॉस्फेट में जो क्षीण अम्लीय उत्प्रेरण उपस्थित रहता है वह *p*-क्लोरो, *m*-टॉलिल फॉस्फेट में नहीं दिखाई देता। अम्लीय उत्प्रेरण की अनुपस्थिति का संभावित कारण, क्लोरो-और मेथिल-समूह के ध्रुवीय प्रभावों की दिशा विपरीत होने से उनकी पारस्परिक क्षतिपूर्ति हो जाना है। इन्हीं के आधार पर ऐसा प्रागुक्त किया जा सकता है कि मोनोऐरिल फॉस्फेटों में प्रबलता से इलक्ट्रॉनों को प्रतिकर्षित करने वाले समूह होने पर वे अम्लीय उत्प्रेरण नहीं दर्शायेंगे। साधारणतया ऐरिल फॉस्फेट में, ऐल्किल फॉस्फेट के विपरीत, अनुमानित अनुनाद स्थायीकृत फीनाक्साइड आयन बनने के कारण $P-0$ बन्धन विखंडित होता है।

अभी भी 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के अम्ल-जलअपघटन के संबंधित गतिज आँकड़े उपलब्ध नहीं हैं। इस प्रकार के फॉस्फेटों में असाधारण अम्लीय उत्प्रेरण होने से इनका अध्ययन विशेष महत्व रखता है। औद्योगिक दृष्टि से महत्वपूर्ण[6], 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का, अध्ययन इसलिये आरम्भ किया गया कि एस्टर को फॉस्फेट पार्श्व शृंखला के आर्थो और पैरा स्थिति के हाइड्रोजन परमाणुओं को क्लोरीन परमाणुओं द्वारा प्रतिस्थापित करने पर न केवल अभिक्रिया के दर पर प्रभाव पड़ेगा परंतु नवीन अभिक्रिया पथ दिखाई देने की संभावना है।

अम्लीय उत्प्रेरण को 2, 4--डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट में, p-क्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट से अधिक होना चाहिये इसलिये 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट में अम्ल-जलअपघटन के परिमाण का क्रम निम्न होगा :

p-नाइट्रो –[3]> 2, 4-डाइक्लोरो –> 2, 3-डाइमेथॉक्सी [7]>

o-मेथॉक्सी, p मेथिल – [8]> p-ब्रोमो –[5]> p-क्लोरो [4]

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं विधियां—2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट को, 2-4, डाइक्लोरोफिनोल एवं फॉस्फोरस ऑक्सीक्लोराइड से मगौरी तथा शॉ[6] की विधि द्वारा बनाया गया। उत्पाद 2, 4-डायक्लोरोफेनिल फॉस्फोरोडायक्लोरीडेट, क्वथनांक 115°/1·5 मिमी. को धीरे धीरे विलोडित गुनगुने जल में मिलाया गया। विलयन को ठंडा करने पर 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट निक्षेपित हुआ, जिसे टॉलूईन द्वारा पृथक कर लिया गया : गलनांक 65° (तत्वों के आकलन के प्रेक्षित परिणाम C, 28·9; H, 2·5; P, 13·0। परिकलित परिणाम C, 29·65; H, 2·05; P, 12·74%)।

प्रक्रिया—2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट ($5{\cdot}0 \times 10^{-4}$ M नहीं तो अन्यथा निर्दिष्ट) का अम्ल-जलअपघटन हाइड्रोक्लोरिक अम्ल माध्यम में, 90°±0·05° पर, 0·63—7M परास में किया गया। इस अध्ययन में एलन की विधि[9] का उपयोग करके अकार्बनिक फॉस्फेट का वर्णमापी आकलन किया गया है।

अम्ल-जलअपघटन के गतिज अध्ययन में सोडियम क्लोराइड तथा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के मिश्रणों का उपयोग करके आयनिक सान्द्रता को स्थिर रखा गया। डाइ-ऑक्सेन को शुद्ध एवं शुष्क[10] किया गया। अन्य रासायनिक द्रव्य बी० डी० एच० तथा रीडल श्रेणी के उपयोग में लाये गये।

परिणाम तथा विवेचना

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का अम्ल-जलअपघटन 0·63—7M हाइड्रोक्लोरिक अम्ल परास में किया गया। इससे प्राप्त गतिज आँकड़े दर्शाते हैं कि आभासी प्रथम कोटि के दर के गुणांक 2M तक अम्लीयता के साथ बढ़ते हैं। 2—4 M अम्लीयता में ये प्राय: स्थिर प्रतीत होते हैं। ये गुणांक सबसे अधिक 4M अम्लीयता में दिखाई दिये और इस अम्लीयता के पश्चात् 7M तक ये दर कम होते दिखाई दिये (सारणी 1)।

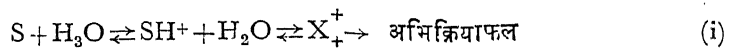
4M अम्लीयता में सबसे अधिक दर का कारण ऐमाइडो[11, 12] जैसा नहीं हो सकता क्योंकि (i) तुलना में इस वर्ग के एस्टर बहुत कम क्षारकीय हैं, (ii) ट्राइफेनिल फॉस्फेट[13] में अधिकतम प्रोटॉनीकरण

प्रेक्षित नहीं होता परंतु इसकी पी-एच लॉग-दर-परिच्छेदिका दर्शाती है, (iii) ऐलिफेटिक फॉस्फेट[13, 14, 15] (ऐरिल फॉस्फेट से अधिक क्षारीय) प्रबल अम्लीय क्षेत्र में उच्चिष्ट नहीं दर्शाते ।

अधिकतम दर के लिये, *p*-नाइट्रोफेनिल फॉस्फेट[3] के संबंध में दिये वैकल्पिक प्रस्ताव के अनुसार अधिकतम दर, या तो आयनिक तीव्रता मंदक प्रभाव या जल-सक्रियता, या दोनों के कारण हो सकता है।

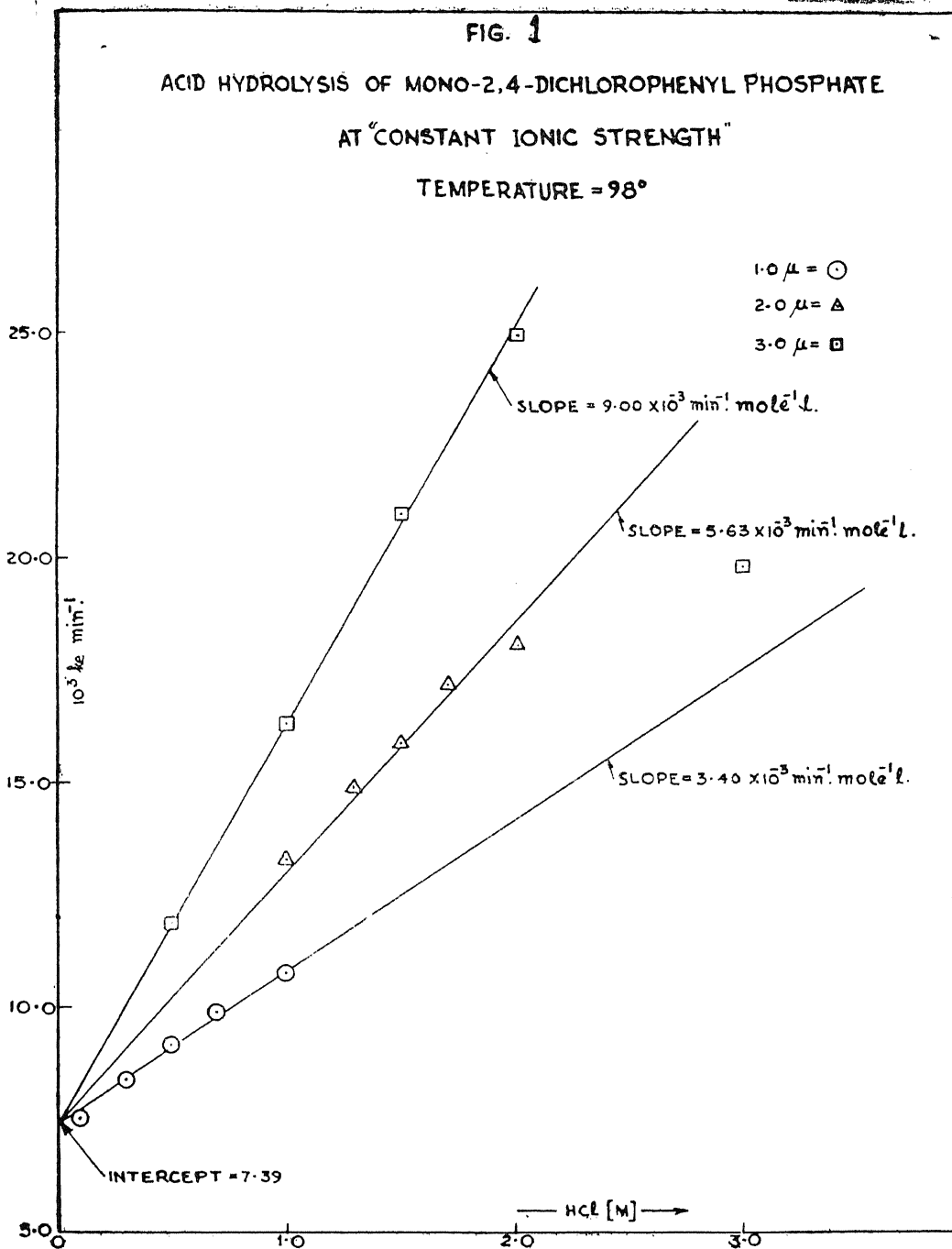
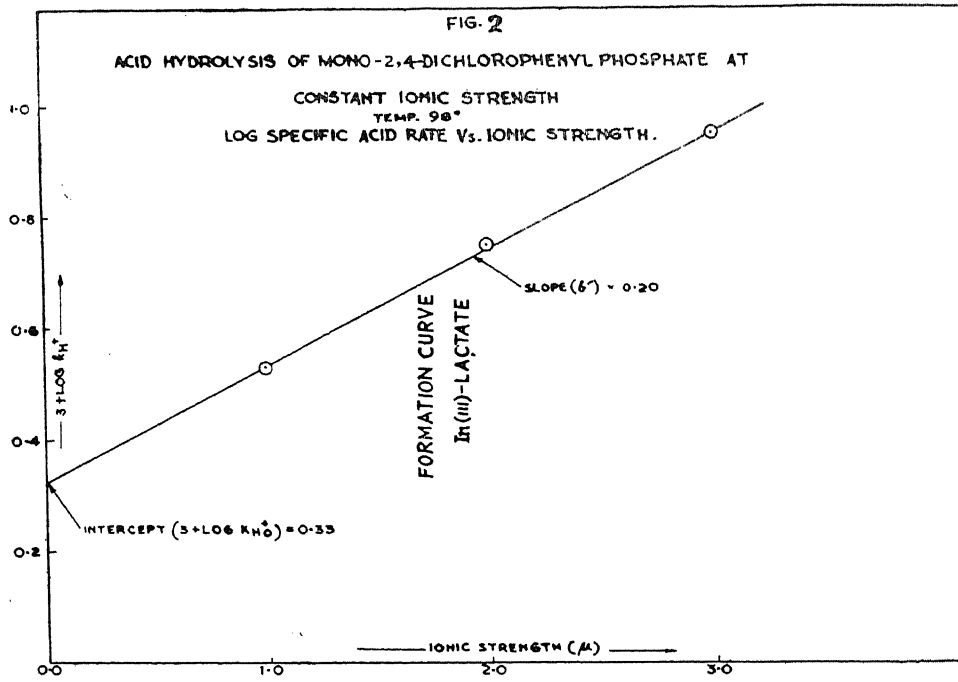
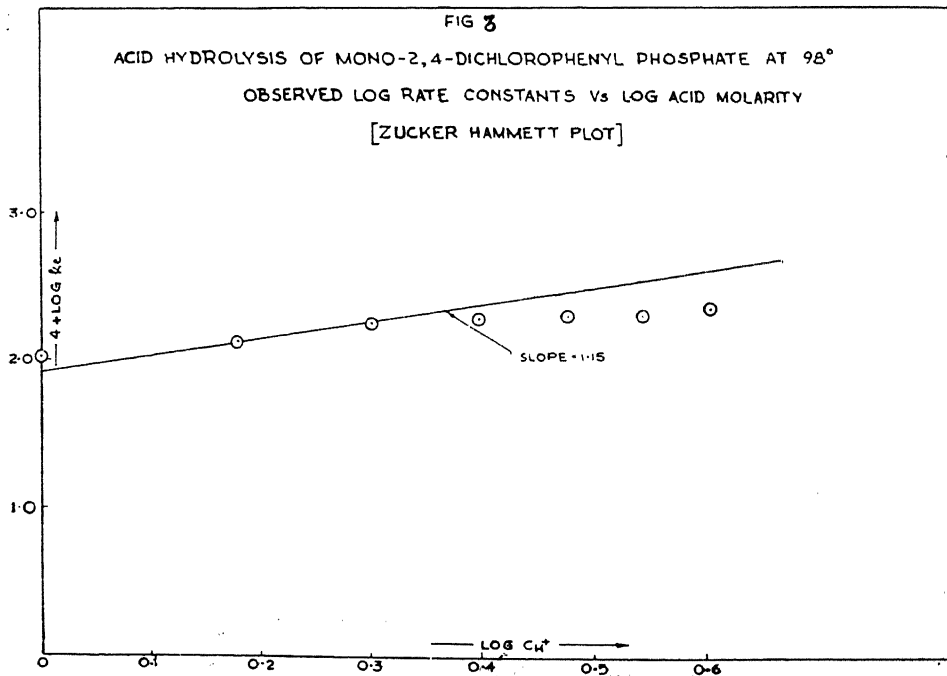
p-क्लोरो एवं *p*-ब्रोमोफेनिल फॉस्फेटों[5] के अम्ल-जलअपघटन के प्रयोग में प्रेक्षित दर, जल-सक्रियता के आधार पर परिकलित सैद्धांतिक दरों से भलीभाँति अनुकूल हैं । ϵ-केपरोलेक्टम में अधिकतम दर जल-सक्रियता एवं आयनिक तीव्रता के प्रभाव[16] के कारण बताया गया है ।

स्थिर आयनिक तीव्रता के गतिज आंकड़े (सारणी 2) अम्लीय उत्प्रेरण दर्शाते हैं । चित्र 1 से स्पष्ट है कि, रेखाकार वक्रों के ढाल, उस आयनिक तीव्रता पर विशिष्ट अम्ल-उत्प्रेरित दरों (k_{H^+}) को निरूपित करते हैं । आयनिक तीव्रता के साथ वक्रों के ढालों में वृद्धि दर्शाती है कि सयुंग्मी अम्लीय प्रजातियों द्वारा होने वाली अभिक्रिया धनात्मक लवण प्रभाव को ग्रहण करने की योग्यता रखती है । दर-अक्ष पर अंतःखंड, जहां रेखाकार वक्र मिलते हैं, सूचित करता है कि केवल अम्लीय उत्प्रेरित दर ही धनात्मक लवण प्रभाव को ग्रहण करने की क्षमता रखते हैं और उदासीन दर (k_N) का योगदान अभिक्रिया के सम्पूर्ण दर में स्थिर है । $\log k_{H^+}$ तथा आयनिक तीव्रता (μ) के बीच खींचे आलेख का रेखाकार वक्र (चित्र 2) ब्रानस्टेड-जेरम[17] समीकरण की वैधता सिद्ध करता है । समान व्यवहार फॉस्फेट[3,4] लेक्टम[16] एवं लेक्टाइड[18] के जल-अपघटन के संबंध में प्रेक्षित किये गये । प्रेक्षित अम्लीय उत्प्रेरित दर गुणांक (k_e) को रूढ़ अभिक्रिया व्यवस्था के लिये ब्रानस्टेड-जेरम समीकरण द्वारा निर्धारित करते हैं ।

$$S + H_3O \rightleftharpoons SH^+ + H_2O \rightleftharpoons \overset{+}{X_+} \rightarrow \text{अभिक्रियाफल} \qquad \text{(i)}$$

जहाँ S, फॉस्फेट एस्टर है और $\overset{+}{X_+}$ संक्रमण-जटिल है । k_e को निम्न समीकरण द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

$$k_e = k_{H^+} \cdot C_{H^+} = k_{H_0^+} \cdot C_{H^+_0} \cdot C_{H_2O} \frac{f\,S \cdot f\,H_2O \cdot f\,H^+}{f\,\overset{+}{X_+}} \qquad \text{(ii)}$$

जहां k, C और f प्रचलित सार्थकता रखते हैं। सक्रियता गुणांक पद गतितः स्थिर रहता है, क्योंकि वह लागरिथमकतः आयनिक तीव्रता तथा C_{H_2O} के साथ परिवर्तित होता है । इसलिये समीकरण (ii) को निम्न प्रकार लिखते हैं

$$\log (k_{H^+} \cdot C_{H^+}) = \log k_{H_0} + \log C_{H^+} + b\mu \qquad \text{(iii)}$$

चित्र 1 : स्थिर आयनिक सान्द्रता पर मोनो -2-4-डाइक्लोरो फेनिल फास्फेट का अम्ल-अपघटन

चित्र 2 : स्थिर आयनिक सान्द्रता पर मोनो -2-4-डइक्लोरो फेनिल फास्फेट का अम्ल-जलअपघटन

चित्र 3 : 98° पर मोनो -2-4-डाइक्लोरो फेनिल फास्फेट का अम्ल-जलअपघटान

$$\log k_{H^+} = \log k_{H_0^+} + b'\mu \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण में k_{H^+}, kH_0^+, b' तथा μ क्रमशः उस आयनिक तीव्रता पर विशिष्ट दर स्थिरांक, शून्य आयनिक तीव्रता पर विशिष्ट दर [दर अक्ष पर अंतः खंड (चित्र 2)], ढाल (चित्र 2) और आयनिक तीव्रता हैं। क्षेत्र 0·5 $M-2M$ हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में अभिक्रिया का संपूर्ण दर निम्न समीकरण द्वारा परिकलित किया जा सकता है :

$$k_{\text{परिकलित}} = k_{H^+} \cdot C_{H^+} + k_N \qquad \text{(v)}$$

परिकलित दर प्रयोग में प्रेक्षित दरों से भलीभाँति अनुकूल है (सारणी 2)।

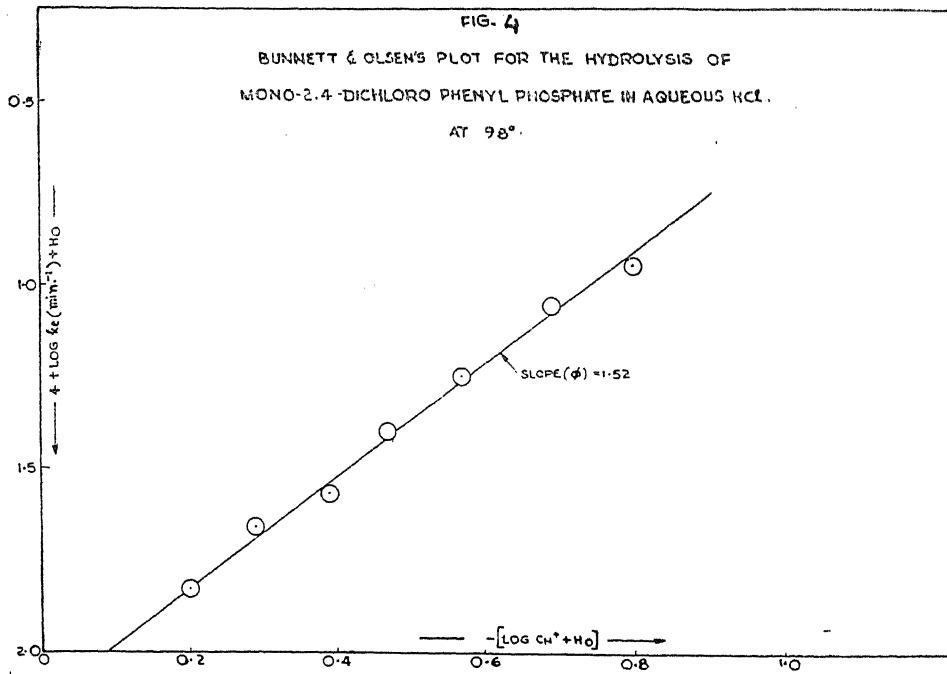
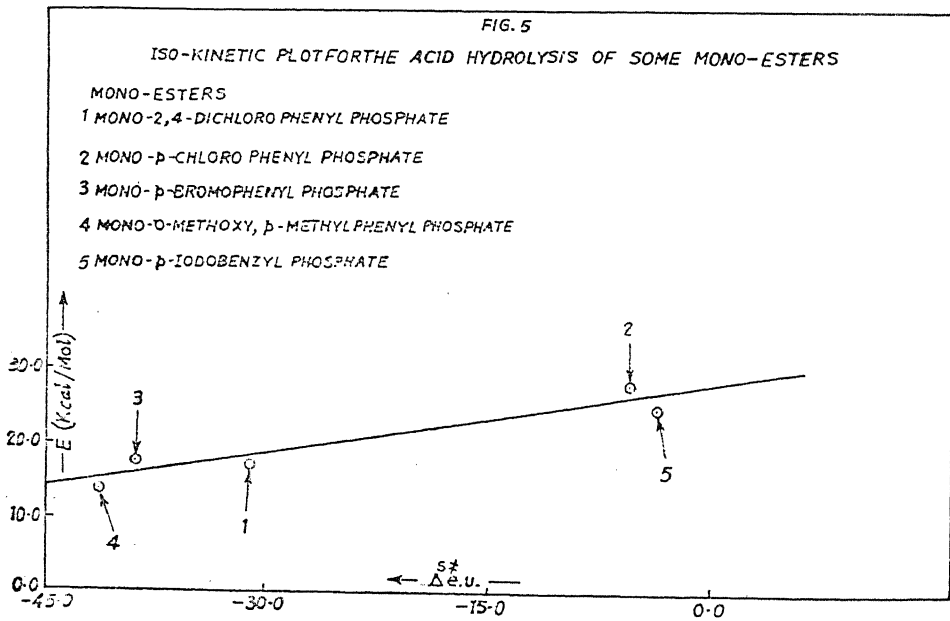
2 M हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से अधिक अम्लीयता में (अर्थात् 2·5 $M-7M$ तक) परिकलित दर, प्रयोग में प्रेक्षित दरों से जल-सक्रियता को लागू करने के पश्चात् ही भलीभाँति अनुकूल होते हैं (सारणी 2)। दर को निम्न समीकरण से निरूपित करते हैं :

$$k_e = k_N + k_{H^+} \cdot C_{H^+} (a_{H_2O})^n \qquad \text{(vi)}$$

स्थिर आयनिक तीव्रता के गतिज आँकड़े (सारणी 2) दर्शाते हैं कि 4 M पर उच्चिष्ठ केवल जल-सक्रियता में परिवर्तन के कारण है।

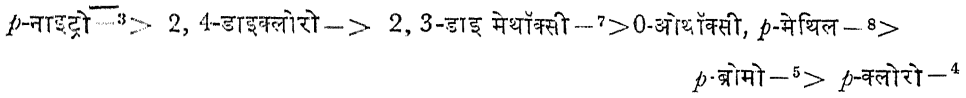
साधारण प्रबल अम्लीय विलयनों में अभिक्रिया की आणविकता ज्ञात करने के लिये जुकर-हेमेट परिकल्पना[19] को लागू किया गया। लॉग दर गुणांक तथा लॉग अम्लीयता के बीच में खींचे आलेख का रेखाकार वक्र (चित्र 3) जिसका ढाल लगभग एक (ढाल, 1·15) है, दर्शाता है कि अभिक्रिया द्वि-आणविक[10] है। ढाल के एक से स्वल्प विचलन का कारण अम्ल उत्प्रेरित दर पर घनात्मक लवण-प्रभाव का होना है।

अभिक्रिया दर की जल-सक्रियता पर निर्भरता को बनेट के प्राचलों से भी दर्शाते हैं। ω^* एवं ω के मान, क्रमशः ~2 एवं ~7, ऐसी अभिक्रियाओं में मिले जिनमें प्रोटॉन का मंद स्थानांतरण[20] होता है। परंतु ये मान टॉलूईन-p-सल्फोनिक अम्ल में एवं HCl और LiCl[3] के मिश्रणों में जल-अपघटन के लिये अयोग्य माने गये। तो भी नये प्राचल को, जिसमें $\log k_e + H_0$ तथा $\log CH^+ + H_0$ के बीच खींचे आलेख का ढाल ϕ, डाइनाइट्रोफेनिल फास्फेट[21] ($\psi = 1 \cdot 2$) में अम्लीयता की अभिक्रिया दर पर निर्भरता के स्पष्टीकरण के लिये अनुकूल समझा गया। इसी प्रकार के परिणाम 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के अम्ल-जलअपघटन के लिये भी प्रेक्षित हुए (चित्र 4)।

उच्च-ऋणात्मक एन्ट्रॉपी एवं तुलना में कम संक्रियण-ऊर्जा के मान अभिक्रिया की द्विआणविकता को दर्शाते हैं। 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के अम्लीय-जलअपघटन की क्रियाविधि ज्ञात करने के लिये उच्चिष्ठ के दोनों ओर 3 M एवं 4·5 M में 80°, 90°, 98° पर आर्हेनियस प्राचल ज्ञात किये गये (सारणी 3)। ये परिणाम उच्चिष्ठ के दोनों ओर अभिक्रिया की समान क्रियाविधि को दर्शाते हैं और साथ ही अभिक्रिया की द्विआणविकता[22] की पुष्टि करते हैं।

चित्र 4 : बनेट-ओल्सन आलेख

चित्र 5 : कुछ मोनोएस्टरों के लिये समगतिक आलेख

संक्रमण-अवस्था का आचरण ज्ञात करने के लिगे ह्युजेस एवं इंगोल्ड[24] के विलायक प्रभाव संबंधी सिद्धातों को उपयोग में लाया गया। इन सिद्धांतों के अनुसार विलायक की आयनकारी शक्ति में वृद्धि के साथ दर में ह्रास यह दर्शाता है कि अम्ल-जलअपघटन की संक्रमण अवस्था में आवेश का प्रकीर्णन होता है। परंतु 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट की क्रियाशील प्रजाति डाइ-ऑक्सेन के अधिक प्रतिशत[25] में अविलेय होने के कारण इस पर विलायक प्रभाव अल्पतर (सारणी 4) है। इस प्रकार के परिणाम अन्य फॉस्फेटों[26] में प्रेक्षित हुए।

अनुनाद-स्थायीकृत फीनॉक्साइड आयन बनने के कारण, $P-0$ बन्धन के विखंडन की संभावना अधिक होगी। मोनोऐरिल फॉस्फेटों के अम्लीय-जलअपघटन में $P-0$ बन्धन का विखंडन ही दर्शाया गया है। ऐरिल मोनोफॉस्फेट एस्टरों के अम्ल-जलअपघटन के गतिज आँकड़े (सारणी 5) दर्शाते हैं कि 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल फॉस्फेट के अम्ल-अपघटन में $P-0$ बन्धन विखंडित होता है। $P-0$ बन्धन का विखंडन, फॉस्फेट एस्टरों के अम्लीय उत्प्रेरण के नीचे दर्शाये परिमाण के क्रम (सारणी 5) से भी अनुमोदित होता है।

p-नाइट्रो[3] > 2, 4-डाइक्लोरो– > 2, 3-डाइ मेथॉक्सी–[7] > 0-ओथॉक्सी, *p*-मेथिल–[8] > *p*-ब्रोमो–[5] > *p*-क्लोरो–[4]

प्रयोगों में प्रेक्षित आँकड़ों के आधार पर अम्ल-जलअपघटन की संभावित क्रियाविधि को निम्न प्रकार से आरेख 1 के अनुसार प्रस्तावित किया जा सकता है।

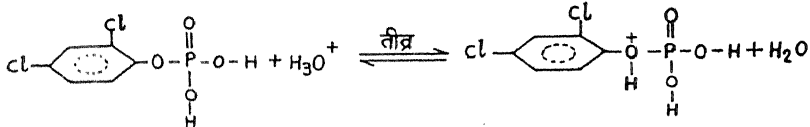
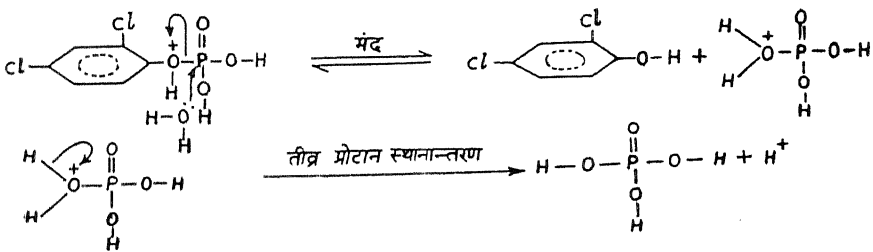
आरेख-1

(i) एस्टर का संयुग्मी अम्लीय प्रजातियों में परिवर्तन

$$\text{Cl}-\text{C}_6\text{H}_3(\text{Cl})-\text{O}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H} + \text{H}_3\text{O}^+ \xrightleftharpoons{\text{तीव्र}} \text{Cl}-\text{C}_6\text{H}_3(\text{Cl})-\overset{+}{\underset{\text{H}}{\text{O}}}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H} + \text{H}_2\text{O}$$

(ii) संयुग्मी अम्लीय प्रजातियों के फॉस्फोरस पर, जल के द्विअणुक न्यूक्लिओफिलिक आक्रमण द्वारा जल - अपघटन

$$\text{Cl}-\text{C}_6\text{H}_3(\text{Cl})-\overset{+}{\underset{\text{H}}{\text{O}}}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H} \;(+\;\text{H}-\text{O}-\text{H}) \xrightleftharpoons{\text{मंद}} \text{Cl}-\text{C}_6\text{H}_3(\text{Cl})-\text{O}-\text{H} + \text{H}_2\overset{+}{\text{O}}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H}$$

$$\text{H}_2\overset{+}{\text{O}}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H} \xrightarrow{\text{तीव्र प्रोटान स्थानान्तरण}} \text{H}-\text{O}-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{O}}{\text{P}}}-\text{O}-\text{H} + \text{H}^+$$

अभिक्रिया की संभावित क्रियाविधि को समगतिकी संबंध द्वारा पुनः अनुमोदित किया है। आलेख (चित्र 5) में मोनो 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल फॉस्फेट का बिन्दु $P-0$ बन्धन द्वारा विखंडित

होने वाले एस्टर की तरह रेखाकार वक्र के समीप आता है जिससे क्रियाविधि का अनुमोदन होता है।

सारणी 1

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के, 98° पर, अम्ल-उत्प्रेरित जल-अपघटन के दर

(2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट=0·0005 *M*)

HCl M	$10^3 k_e$ मिनट$^{-1}$
1·00	10·77
1·50	13·60
2 00	18·10
2·50	18·62
3·00	19·87
3·50	19·70
4·0C	22·58
4·50	13·76
5·00	5·65
5·50	9·40
6·00	4·38
6·50	3·26
7·00	1·18

सारणी 2

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के, 98° पर, अम्ल-जलअपघटन के सैद्धांतिक एवं प्रेक्षित दर।

HCl M	10^3 ke (मिनट$^{-1}$)	
	प्रेक्षित	परिकलित
0·5	8·28	8·73
1·0	10·77	10·75
1·5	13·60	13·74
2·0	18·10	18·05

HCl M	10^3 k_e (मिनिट$^{-1}$)	
	प्रज्ञित	परिकलत
2·5	18 62	18·92
3·0	19·87	20·18
3·5	19·70	20·01
4·0	22·58	22·75
4·5	13·76	13·81
5·0	9·40	9·32
5·5	5·65	5·50
6·0	4·38	4·29
6·5	3·26	3·16
7·0	1·18	1·17

सारणी 3

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का जलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में जल-अपघटन के लिये ज्ञात किये गये आर्हेनियस के प्राचल

HCl M	सक्रियण ऊर्जा 'E' कि० कैलोरी/मोल	प्राचल आवृति कारक 'A' (सेकंड$^{-1}$)	एन्ट्रॉपी $\triangle s^*$ e. u.
3·0	16·9	$3·3 \times 10^6$	—31·3
4·5	17·5	$5·6 \times 10^6$	—3)·3

सारणी 4

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के अम्लीय जल अपघटन पर विलायक का प्रभाव

HCl M	उपयोग में लाया डाइ-ऑक्सेन का प्रतिशत (विलायक) (V/V)	10^3 k_e (मिनट$^{-1}$)
4·0	10·0	18·80
4·0	30·0	16 49
4·0	50·0	15·88

सारणी 5

फेनिल फॉस्फेट मोनोएस्टरों के संयुग्मी अम्लीय प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन के लिये तुलनात्मक गतिज प्राचल

फेनिल एस्टर	माध्यम	$10^5 kH^+$ (सेकंड$^{-1}$) (ताप)	E कि०कै०/मोल	A (सेकंड$^{-1}$)	$\triangle s^*$ e. u.	उच्चिष्ठ	विखंडन	आण्विकता	निर्देश
p-नाइट्रो—	$H_2{}^cO_4$	31·4 (100°)	18·7	$1{\cdot}1\times 18^8$	—24·0	4 M	$P-0^*$	2	3
2, 4-डाइक्लोरो—	HCl	3·56 (kH_0) (98°)	16·9 (3·0 M) 17·5 (4·5 M)	$3{\cdot}3\times 10^6$ $5{\cdot}6\times 10^6$	—31·3 —30·3	4 M	$P-0^*$	2	प्रस्तुत कार्य
2, 3-डाइमेथॉक्सी—	HCl	3·13 (98°)	25·9 (3·0 M) 22·9 (5·0 M)	$2{\cdot}83\times 10^{11}$ $4{\cdot}59\times 10^9$	—17·24 —20·88	4 M	$P-0^*$	2	7
0-मेथॉक्सी- p-मेथिल—	HCl	2·9 (98°)	14·14 (3·0 M)	$1\ 0\times 10^8$	—41·5	4 M	$P-0^*$	2	8
p-ब्रोमो—	$HClO_4$	0 44 (90°)	17·4 (1·0 M)	$7{\cdot}7\times 10^6$	—38 94	7 M	$P-0^*$	2	5
p-क्लोरो—	HCl	0·045 (80°) (kH_0)	28·46 (1·0 M)	—	—5·57	7 M	$P-0^*$	2	4

टिप्पणी—* कल्पित विखंडन

निर्देश

1. बंटन, सी० ए०, **जर्न० केमि० एज्यूके०, जनवरी**, 1964
2. कॉक्स, जे० आर० (ज्यू०), तथा रामसे, ओ० बी०, **केमि० रिव्यू०**, 1964, **64**, 137
3. बरनार्ड, पी० डब्लू० सी०, बंटन, सी० ए०, केलरमन, डी०, म्हाला, एम० एम०, सिलवर, **बी०** एल०, वरनन, सी० ए० तथा वेल्च, वी० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०, बी०** 1966, 227
4. म्हाला, एम० एम० तथा पटवर्धन, एम० डी०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1968, **6**, 704
5. म्हाला, एम० एम०, पटवर्धन, एम० डी० तथा कस्तुरी, जी०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1969, **7**, 149
6. मगौरी, एम० एच० तथा शॉं, जी०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1953, 1479-82
7. म्हाला, एम० एम० तथा शशीप्रभा, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1970, **8**, 972-76
8. [illegible], बी० बी०, **डी० फिल० थीसिस**, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर, 1971
9. एलन, आर० जे० एल०, **बायोकेमि० जर्न०**, 1940, **34**, 858
10. [illegible], के० तथा [illegible], एच०, Ber. dt. chem. Ges. 1938, **71**, 2627
11. [illegible], जे० डी० तथा [illegible], एस० सी० आर०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1957, 2000
12. [illegible], डी० तथा टेलर, टी० आई०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1957, **79**, 2684
13. बरनार्ड, पी० डब्लू० सी०, बंटन, सी० ए०, लीवेलिन, डी० आर०, वरनन, सी० ए० तथा वेल्च, वी० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1961, 2670
14. बंटन, सी० ए०, लीवेलिन, डी० आर०, ओल्डाम, के० जी० तथा वरनन, सी० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1958, 3574
15. बंटन, सी० ए०, म्हाला, एम० एम०, ओल्डाम, के० जी० तथा वरनन, सी० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1960, 3293
16. म्हाला, एम० एम० तथा जगदाले, एम० एच०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1968, **6**, 711
17. लॉग, एफ० ए० तथा मैकडेविट, डब्लू० एफ०, **केमि० रिव्यू०**, 1952, **51**, 119
18. म्हाला, एम० एम० तथा मिश्रा, जे० पी०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1970, **8**, 243
19. जुकर, एल० तथा हेमेट, एल० पी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1939, **61**, 2791

20. बनेट, जे० एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1961, **83**, 49 6

21. बंटन, सी० ए०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1967, **89**, 1221

22. शालेगर, एल० एल० तथा लांग, एफ० ए० "Advances in Physical Organic Chemistry" भाग 1, सम्पादक वी० गोल्ड, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1963, 26

23. ह्यूजेस, ई० डी० तथा इंगोल्ड, सी० के०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1935, 244

24. कपूर, के० ए०, धर, एम० एल०, ह्यूजेस, ई० डी०, इंगोल्ड, सी० के०, मेकनलटी, बी० जे०, तथा वुल्फ, एल० आइ०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1948, 2043

25. बंटन, सी० ए० तथा फेन्डलर, जे० एच०, **जर्न० ऑरगे० केमि०**, 1965, **30**, 1365

26. शशीप्रभा, **डी० फिल० थीसिस**, ग्वालियर विश्वविद्यालय, 1971

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January 1974, Pages 31-42

अल्पतापीय, अल्पघनत्व वाले इलेक्ट्रॉन-आयन चुम्बकीय प्लाज़्मा में तरंग संचरण

सुरेन्द्र रावत
राजकीय महाविद्यालय, कोटपूतली, राजस्थान

[प्राप्त—अक्टूबर 30, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में अल्पतापीय, अल्पघनत्व वाले इलेक्ट्रान-आयन प्लाज़्मा में तरंगों के संचरण के लिए द्विघातीय युग्मित तरंग समीकरणों के व्यंजक प्राप्त किये गये हैं जबकि वाह्य स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता बहुत अधिक हो। तरंगों को रेखाध्रुवित मानते हुए इनसे विक्षेपण सम्बन्ध ज्ञात किया गया। इस सम्बन्ध को कई विशिष्ट दशाओं में सरलीकृत करके कला वेगों के व्यंजकों की व्युत्पत्ति करके विस्तृत रूप से अध्ययन किया गया है। यह देखा गया है कि सामान्यतः इस विशिष्ट प्लाज़्मा में छः प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं जिनमें से केवल चार तरंगें या तो वाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में या लम्बवत् दिशा में संचरित होती हैं। इस प्लाज़्मा माध्यम में न्यूनतम स्रोत आवृत्ति, अनन्त स्रोत आवृत्ति तथा अनन्त घूर्णन आवृत्ति की दशाओं में क्रमशः तीन, पाँच तथा चार प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं।

Abstract

Wave propagation in low-temperature, low-density electron-ion magnetoplasma. *By* Surendra Rawat, Government College, Kotputli, Rajsthan.

In this research paper, expressions for second order coupled wave equation are obtained for the propagation of waves in a low-temperature, low-density, electron-ion plasma, when the intensity of external static magnetic field is very high. Assuming wave as plane polarized, the dispersion relations are obtained. After simplification of these relations in several particular cases, the expression for the phase velocities are derived and investigated in detail. It is observed that in general six type of waves propagate in this particular plasma out of which four waves propagate either in the same direction or in the perpendicular direction to the external magnetic field. In

the case of very low source frequency, infinite source frequency and infinite gyrofreq-**uency** there are respectively three, five and four types of waves propagating in this **plasma medium.**

मुख्य चिन्हों की सूची

ϵ_0	स्वतंत्र आकाश की विद्युतशीलता
μ_0	स्वतंत्र आकाश की पारगम्यता
c	स्वतंत्र आकाश में प्रकाश का वेग
e	इलेक्ट्रॉन का आवेश
m	कण की संहति
N	कण का औसत आबादी घनत्व
n	कण का विक्षुब्ध घनत्व
p_0	कण का औसत दाब
p	कण का बिक्षुब्ध दाब
ω	कोणीय स्रोत आवृत्ति
ω_p	कोणीय प्लाज़्मा आवृत्ति
ω_g	कोणीय घूर्णन आवृत्ति
v	तरंग का कला वेग
β	तरंग का कला संचरण स्थिरांक
$\vec{B}_0$	बाह्य स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र
$\vec{E}$	विद्युत क्षेत्र सदिश
$\vec{H}$	चुम्बकीय क्षेत्र सदिश
$\vec{V}$	कण का वेग सदिश
∇	डेल संकारक
$\vec{z}$	z अक्ष पर इकाई सदिश

पिछले कुछ वर्षों में विभिन्न प्रकार के चुम्बकीय प्लाज़्मा में संचरण की प्रकृति जानने में विशेष ध्यान दिया गया है। तालेकर तथा रावत[1] ने उष्ण इलेक्ट्रॉन चुम्बकीय प्लाज़्मा में विद्युत चुम्बकीय तथा

विद्युत ध्वनिक तरंगों के संचरण के लिए द्विघातीय युग्मित तरंग समीकरण प्राप्त किया और इससे इन तरंगों के संचरण के लिए विक्षेपण सम्बन्ध ज्ञात किया। इससे पता चलता है कि उष्ण इलेक्ट्रॉन चुम्बकीय प्लाज़्मा में केवल तीन प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं। ये हैं—

(1) साधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग,

(2) असाधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग

(3) इलेक्ट्रॉन प्लाज़्मा तरंग।

यदि इस चुम्बकीय प्लाज़्मा में आयन की गति पर भी विचार करें तो इनके अतिरिक्त एक चौथे प्रकार की तरंग भी इसमें संचरित होता है[2-5] जिसे आयन प्लाज़्मा तरंग कहते हैं। यह तरंग प्रत्येक आवृत्ति के लिये प्लाज़्मा में संचरित होती है।

इन अध्ययनों में हमने प्लाज़्मा के दाब को अदिश माना है। यह मान्यता तभी सम्भव है जब प्लाज़्मा में संघट्ट अधिक मात्रा में हों। यदि वाह्य स्थिर चुम्वकीय क्षेत्र अधिक प्रभावशाली है तथा प्लाज़्मा अल्पतापीय और अल्पघनत्व वाला है तो अवयवों के दाब विकर्ण मैट्रिक्स के द्वारा प्रदर्शित होते हैं। इस प्रकार के प्लाज़्मा में बर्नस्टीन तथा त्रिहान[6], ली तथा अन्य सहयोगी[7] तथा तालेकर और रावत[8] इत्यादि ने तरंगों के संचरण के लिये विस्तृत रूप से विक्षेपण सम्बन्ध का अध्ययन किया है। अधिकांश अध्ययनों में केवल दो प्रकार की विशिष्ट दशायें ली गई हैं।

(1) जब तरंगों का संचरण स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर रहता है।

तथा

(2) जब तरंगों का संचरण स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् तल में होता है। जब तरंगें अल्प-तापीय तथा अल्पघनत्व वाले प्लाज़्मा में किसी भी दिशा में संचरित होती हैं तो इस दशा में रावत[9] ने विक्षेपण समीकरण का गहन अध्ययन किया है। प्रस्तुत शोध पत्र में इसी प्रकर के प्लाज़्मा में आयन की गति पर विचार किया गया है। यह गति कम आवृत्ति वाली तरंगों के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। सर्वप्रथम द्विघातीय युग्मित तरंग समीकरण प्राप्त किये जावेंगे तथा फिर इससे विभिन्न तरंगों के लिए विक्षेपण सम्बन्धों की उत्पत्ति की जावेगी। इस अध्ययन को प्लाज़्मा के दो से अधिक अवयवों के लिए भी व्यापीकृत कर सकते हैं।

आधारभूत समीकरण

माना वाह्य चुम्बकीय क्षेत्र दक्षिणावर्त्त कार्त्तीय निर्देशांक निकाय के z अक्ष की दिशा में हैं तथा चर राशियों की समय निर्भरता exp $(j\omega t)$ के रूप में है। प्लाज़्मा में तरंगों के संचरण के अध्ययन के लिए उदासीन, अल्पतापीय तथा अल्प घनत्व वाले इलेक्ट्रॉन-आयन चुम्बकीय प्लाज़्मा को संचालित करते हुए एकघातीय समीकरणों का बन्द समुच्चय निम्नलिखित है जो कम आयाम वाली तरंगों के लिए स्रोत से स्वतंत्र प्रदेश में मान्य है।

(अ) मैक्सवेल समीकरण :

$$\nabla \times \vec{E} = -j\,\omega\,\mu_0\,\vec{H} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\,\omega\,\epsilon_0\,\vec{E} + \sum_k Q_k N_k \vec{V}_k \tag{2}$$

(आ) संहृति अभिगमनी समीकरण :

$$j\,\omega\,n_k + N_k(\nabla \cdot \vec{V}_k) = 0 \tag{3}$$

(इ) संवेग अभिगमनी समीकरण :

$$j\,\omega\,m_k N_k \vec{V}_k - Q_k N_k(\vec{E} + B_0[\vec{V}_k \times \vec{Z}]) + \nabla \cdot \hat{p}_k = 0 \tag{4}$$

(ई) उष्मा अभिगमनी समीकरण : (बर्नस्टीन तथा त्रिहान[6])

$$j\,\omega\,p_{k11} + p_{k011}\nabla \cdot \vec{V}_k + 2p_{k011}\frac{\partial V_{kz}}{\partial Z} = 0 \tag{5}$$

$$j\,\omega\,p_{k\perp} + 2p_{k0\perp}\nabla \cdot \vec{V}_k - p_{k0\perp}\frac{\partial V_{kz}}{\partial Z} = 0 \tag{6}$$

(उ) इलेक्ट्रॉन दाब टेन्सर

$$\hat{p}_k = \begin{bmatrix} p_{k\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{k\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{k11} \end{bmatrix} \tag{7}$$

(ऊ) अभिलाक्षणिक टेन्सर

$$\hat{\chi}_k = \frac{1}{(\Omega^2 - R_k^2)} \begin{bmatrix} \Omega^2 & +j\Omega R_k & 0 \\ -j\Omega R_k & \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\Omega^2 - R_k^2) \end{bmatrix} \tag{8}$$

यहाँ $\Omega = \omega/\omega_p$ तथा $R_k = \omega_{gk}/\omega_p$

(ए) सापेक्ष विद्युतशीलता टेन्सर

$$\hat{\epsilon} = \left[\hat{I} - \sum_k \frac{\hat{\chi}_k}{\Omega^2 b_k}\right] \tag{9}$$

यहाँ

$$b_k = \left[\frac{m_k}{m_e} \cdot \frac{N_e}{N_k} \cdot \frac{e^2}{Q_k^2}\right]$$ तथा $\hat{I} =$ इकाई मैट्रिक्स

उपरलिखित समीकरणों में अधोलिखित k कणों के प्रकार को प्रदर्शित करता है —i आयन तथा e इलेक्ट्रॉन के लिए। राशियों पर अंकित अधोलिखित 11 तथा ⊥ वाह्य स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर तथा लम्बवत् दिशा में अवयवों को प्रदर्शित करते हैं और $Q_e = -e$ तथा $Q_i = e$ है।

3. सामान्य युग्मित तरंग समीकरण

संवेग अभिगमनी समीकरण (4) को मैट्रिक्स के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$j\,\omega m_k N_k \vec{V}_k - Q_k N_k \hat{\chi}_k \vec{E} + \hat{\chi}_k (\nabla \cdot \hat{P}_k) = 0 \tag{10}$$

तथा उष्मा अभिगमनी समीकरण (5) तथा (6) को हल करने पर

$$\nabla \cdot \vec{V}_k = -\frac{j\,\omega}{5 p_{k011} p_{k01}} (p_{k11}\, p_{k01} + 2 p_{k1}\, p_{k011}) \tag{11}$$

प्राप्त होता है। समीकरण (10) का डाइवर्जेन्स लेने पर तथा इसे फिर समीकरण (11) के साथ संयुक्त करने पर हमें $\vec{E}$ तथा p_k के लिए युग्मित समीकरण

$$\nabla \cdot [\hat{\chi}_k (\nabla \cdot \hat{p}_k)] + \frac{\omega^2 N_k m_k}{5 p_{k011}\, p_{k01}} (p_{k11}\, p_{k01} + 2 p_{k1}\, p_{k011}) - Q_k N_k \Delta \cdot (\hat{\chi}_k \vec{E}) = 0 \tag{12}$$

मिलता है।

समीकरण (2) में समीकरण (10) से $\vec{V}_k$ का मान रखने पर $[\nabla \times \vec{H}]$ के लिए एक व्यंजक

$$\nabla \times \vec{H} = j\,\omega\,\epsilon_0 \hat{\epsilon}\, \vec{E} + \Sigma \frac{j\,\omega\,\epsilon_0}{Q_k N_k b_k} \frac{\hat{\chi}_k}{\Omega^2} (\nabla \cdot \hat{p}_k) = 0 \tag{13}$$

मिलता है। यह इस प्लाज़्मा के लिए संशोधित मैक्सवेल समीकरण कहलाता है। समीकरण (1) का कर्ल लेने पर और तब समीकरण (13) की सहायता से $[\nabla \times \vec{H}]$ का प्रतिस्थापन करने पर हमें $\vec{E}$ तथा p_k में दूसरा युग्मित समीकरण प्राप्त होता है।

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \beta_0^2\, \hat{\epsilon}\, \vec{E} - \beta_0^2 \sum_k \frac{1}{Q_k N_k b_k} \frac{\hat{\chi}_k}{\Omega^2} (\nabla \cdot \hat{p}_k) = 0 \tag{14}$$

इसी तरह $\vec{H}$ तथा p_k के लिए सामान्य द्विघातीय युग्मित तरंग समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। समीकरण (13) को $\hat{\epsilon}^{-1}$ से पूर्वगुणा करने के बाद और तब कर्ल लेने पर तथा इसके बाद समीकरण (1) से $(\nabla \times \vec{E})$ का मान प्रतिस्थापन करने पर

$$\nabla \times (\hat{\epsilon}^{-1} \nabla \times \vec{H}) - \beta_0^2 \vec{H} - \frac{j\,\omega\,\epsilon_0}{\Omega^2} \nabla \times \left[\hat{\epsilon}^{-1} \sum_k \frac{1}{Q_k N_k b_k} \hat{\chi}_k (\nabla \cdot \hat{p}_k) \right] = 0 \tag{15}$$

युग्मित तरंग समीकरण प्राप्त होता है। समीकरण (13) को $\hat{\epsilon}^{-1}$ से पूर्वगुणा करने पर तथा तब इससे समीकरण (12) में $\vec{E}$ को विलुप्त करने पर $\vec{H}$ और p_k में दूसरा युग्मित समीकरण

$$\nabla \cdot \hat{x}_k(\nabla \cdot \hat{p}_k)+\frac{Q_k N_k}{\Omega^2}\nabla \cdot \hat{x}_k \hat{\epsilon}^{-1}\left[\sum_{l=i,e}\frac{\hat{\chi}_l}{Q_l N_l b_l}(\nabla \cdot \hat{p}_l)\right]$$

$$+\frac{\omega^2 m_k N_k}{5p_{k011}\, p_{k0l}}\left(p_{k11}\, p_{k0l}+2p_{kl}\, p_{011}\right)=\frac{Q_k N_k}{j\omega\epsilon_0}\nabla \cdot \hat{x}_k \hat{\epsilon}^{-1}(\nabla \times \vec{H}) \tag{16}$$

मिलता है।

इन तरंग समीकरणों को सामान्य विधि से हल करना अत्यन्त कठिन है क्योंकि वाह्य चुम्बकीय क्षेत्र से युग्मन के अलावा प्लाज्मा तरंगें स्वयं संयोजित हो जाती हैं इसलिए तरंगों के बीच युग्मन की प्रकृति जानने के लिए इन समांग तरंग समीकरणों का एकतलीय तरंग हल मानते हैं।

विक्षेपण मैट्रिक्स

माना इन तरंग समीकरणों का हल $\vec{E}=E_0 \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})$ के रूप में है। यहाँ $\vec{k}$ संचरण सदिश इस प्रकार है कि $z\times\vec{k}$ निर्देशांक निकाय के 5 अक्ष से सम्पाती है और अक्ष से θ कोण बनाता है। इस हल को समीकरण (5), (6), (10) तथा (14) में प्रतिस्थापन करने पर तथा $\vec{E}$ के अतिरिक्त अन्य चर राशियों को विलुप्त करने पर

$$\hat{D}\,\vec{E}=0 \tag{17}$$

प्राप्त होता है। यहाँ $\hat{D}$ 3×3 का मैट्रिक्स है जिसके अवयव निम्नलिखित हैं।

$$D_{11}=\left[\left(1-\frac{c^2}{v^2}\cos^2\theta\right)-\sum_k\frac{1}{\Omega^2 b_k\triangle_k}\left(v^4-3u^2{}_{k11}\,v^2\cos^2\theta\right)\right] \qquad (18\ \text{अ})$$

$$D_{12}=-D_{21}=-\left[\sum_k\frac{jR_k}{\Omega^3 b_k\triangle_k}\left(v^4-3u^2{}_{k11}\,v^2\cos^2\theta\right)\right] \qquad (18\ \text{आ})$$

$$D_{13}=\left[\frac{c^2}{v^2}-\sum_k\frac{1}{\Omega^2 b_k\triangle_d}v^2u^2{}_{k1}\right]\sin\theta\cos\theta \qquad (18\ \text{इ})$$

$$D_{22}=\left[\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)-\sum_k\frac{1}{\Omega^2 b_k\triangle_k}\left\{\triangle_k+\frac{R^2{}_k}{\Omega^2}\left(v^4-3u^2{}_{k11}\,v^2\cos^2\theta\right)\right\}\right] \qquad (18\ \text{ई})$$

$$D_{23}=\left[\sum_k\frac{jR_k}{\Omega^3 b_k\triangle_k}v^2u^2{}_{k1}\sin\theta\cos\theta\right] \qquad (18\ \text{उ})$$

$$D_{31}=\left[\frac{c^2}{v^2}-\sum_k \frac{1}{\Omega^2 b_k \triangle_k} v^2 u^2{}_{k11} \sin\theta\cos\theta\right] \quad (18\text{ ऊ})$$

$$D_{32}=\left[\sum_k \frac{-jR_k}{\Omega^3 b_k \triangle_k} v^2 u^2{}_{k11} \sin\theta\cos\theta\right] \quad (18\text{ ए})$$

$$D_{33}=\left[\left(1-\frac{c^2}{v^2}\sin^2\theta\right)-\sum_k \frac{1}{\Omega^2 b_k \triangle_k}\left\{\left(1-\frac{R^2{}_k}{\Omega^2}\right)v^4-2u^2{}_{k\perp} v^2 \sin^2\theta\right\}\right] \quad (18\text{ ऐ})$$

$$\triangle_k=\left[\left(1-\frac{R^2{}_k}{\Omega^2}\right)v^4-\left\{3u^2{}_{k11}\cos^2\theta\left(1-\frac{R^2{}_k}{\Omega^2}\right)+2u^2{}_{k\perp}\sin^2\theta\right\}v^2 + 5u^2{}_{k11}u^2{}_{k\perp}\sin^2\theta\cos^2\theta\right] \quad (19)$$

$$U^2{}_{k11,\perp}=\frac{p_{k011,\perp}}{m_k N_k} \text{ तथा } v=\frac{\omega}{k}$$

समीकरण (17) का हल ज्ञात करने के लिए $\hat{D}$ का सारणिक शून्य होना चाहिए ।

$$\det \hat{D}=0 \quad (20)$$

यह इस विशिष्ट प्लाज़्मा माध्यम में संचरित तरंगों के लिए विक्षेपण सम्बन्ध देता है । समीकरण (20) को हल करने से पता चलता है कि यह v^2 में छः घातीय समीकरण है अतः इसका हल निकालना अत्यन्त कठिन है । इसीलिए इस विक्षेपण सम्बन्ध का अध्ययन पहले कुछ विशष्ट दशाओं में करेंगे ।

(अ) वाह्य चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर तरंग संचरण

इस विशिष्ट दशा में $(\theta=0)$, विक्षेपण मैट्रिक्स का सारणिक दो खंडों में विभक्त हो जाता है ।

$$D_{11}D_{22}+D_{12}D_{21}=0 \quad (21\text{ अ})$$

तथा

$$D_{33}=0 \quad (21\text{ आ})$$

प्रथम खंड साधारण तथा असाधारण विद्युतचुम्बकीय तरंगों के लिये विक्षेपण सम्बन्ध देता है जिनके कला वेगों को निम्न समीकरण से प्रदर्शित करते हैं ।

$$\frac{v_{0,e}}{c}=\left[1-\frac{1}{\Omega(\Omega\pm R)}-\frac{M}{\Omega(\Omega\mp RM)}\right]^{-1/2} \quad (22\text{ अ})$$

यहाँ $R_e=-R$ तथा $M=m_e/m_i$

द्वितीय खंड से मंद तथा द्रुत प्लाज़्मा तरंगों के लिये विक्षेपण सम्बन्ध प्राप्त होता है । यह है

$$(\Omega^2-1-M)\nu^4-3U^2{}_{e11}\nu^2\{\Omega^2(1+\alpha_{11})-(\alpha_{11}+M)\}+9\alpha_{11}\Omega^2U^2U^2{}_{e41}=0 \quad (22\text{ आ})$$

यहाँ $a_{11}=U^2_{i11}/U^2_{e11}$

समीकरण (22 अ) शेशाद्री[4] के व्यंजक के अनुरूप तथा समीकरण (22 आ) रावत[10] द्वारा प्राप्त व्यंजक के अनुरूप हैं। $a_{11} \ll 1$, बहुमान्य सन्निकटन का प्रयोग करने पर संशोधित प्लाज़्मा तरंगों के दोनों कला वेगों को प्राप्त कर सकते हैं।

$$\nu^2_{p_1}=3U^2_{e11}\Omega^2/\Omega^2-1); \qquad \Omega^2>1 \tag{23}$$

$$\nu^2_{p_2}=3U^2_{e11}[(a_{11}+M)-\Omega^2]; \qquad \Omega^2<(a_{11}+M) \tag{24 अ}$$

$$=3U^2_{e11}[a_{11}(a_{11}+M)]^{1/2}; \qquad \Omega^2=(a_{11}+M) \tag{24 आ}$$

$$=3U^2_{i11}\Omega^2/[\Omega^2-(a_{11}+M)]; \quad \Omega^2>(a_{11}+M) \tag{24 इ}$$

(आ) बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् तरंग संचरण

पहले वाली विशिष्ट दशा की तरह इस दशा $(\theta=\pi/2)$ में भी विक्षेपण सम्बन्ध दो खंडों में विभक्त हो जाता है। पहला खंड साधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग के लिए कला वेग का निम्न व्यजंक देता है।

$$\frac{v_0}{c}=\Omega/(\Omega^2-1-M)^{1/2}; \quad \Omega^2>1+M \tag{25 अ}$$

द्वितीय खंड हल करने पर विभिन्न तरंगों के बीच युग्मन निदर्शित करता है इसीलिए यह संशोधित तरंगों के तदनुरूप है। इन संशोधित तरंगों-संशोधित असाधारण विद्युतचुम्बकीय, संशोधित इलेक्ट्रॉन प्लाज़्मा तथा संशोधित आयन प्लाज़्मा तरंग-के लिए कला वेगों को घन समीकरण से निकाल सकते हैं जो द्वितीय खंड से प्राप्त होता है।

$$A_0\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^3+A_1\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2+A_2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+A_3=0 \tag{25 आ}$$

यहाँ

$$A_0=\Omega^4-\Omega^2(2+2M+R^2+M^2R)+(1+M+MR^2)^2 \tag{26 अ}$$

$$\begin{aligned}A_1=&-\Omega^4(1+2r_{e1}+2r_{i1})+\Omega^2(1+M+R^2+M^2R^2+2r_{e1}+4Mr_{e1}\\&+2M^2R^2r_{e1}+4r_{i1}+2Mr_{i1}+2R^2r_{i1})\\&-(MR^2+M^2R^2+M^2R^4+2Mr_{e1}+2M^2r_{e1}+2M^2R^2r_{e1}\\&+2r_{i1}+2Mr_{i1}+2MR^2r_{i1})\end{aligned} \tag{26 आ}$$

$$\begin{aligned}A_2=&2[\Omega^2(r_{e1}+r_{i1}+r_{e1}r_{i1})-\Omega^2(Mr_{e1}+M^2R^2r_{e1}+r_{i1}+R^2r_{i1}\\&+r_{e1}r_{i1}+Mr_1r_{i1})\end{aligned} \tag{26 इ}$$

$$A_3 = -\Omega^4 r_{e\perp} r_{i\perp} \quad (26 \text{ ई})$$

$$r_{k\perp} = U^2{}_{k\perp}/c^2$$

यह समीकरण तालेकर तथा रावत[5] द्वारा प्राप्त व्यंजक के $2u\perp^2{}_k = u_k{}^2$ के तुल्य है। इन तरंगों के कला वेगों को पहले ही शेशाद्री[4] तथा तालेकर तथा रावत[5] ने विस्तृत रूप से अध्ययन किया है।

(इ) बहुत कम स्रोत आवृत्ति के लिए संचरण

इस विशिष्ट दशा में स्रोत आवृत्ति लगभग शून्य के बराबर मानते हैं। इससे विक्षेपण सम्बन्ध तीन खंडों में विभक्त हो जाता है। इनसे हम साधारण विद्युतचुम्बकीय, असाधारण विद्युतचुम्बकीय तथा ध्वनिक तरंगों के कला वेगों को ज्ञात कर सकते हैं। ये हैं।

$$v_0 = CR\sqrt{\{M/(1+M+MR^2)\}} \quad (27 \text{ अ})$$

$$v_e = CR\cos\theta\sqrt{\{M/(1+M+MR^2)\}} \quad (27 \text{ आ})$$

$$v_p = U_{e11}\cos\theta\sqrt{3(a_{11}+M)/(1+M)} \quad (27 \text{ इ})$$

इन वेग व्यंजकों को देखकर यह पता चलता है कि छः तरंगों में से केवल तीन तरंगें बहुत कम आवृत्ति वाले प्रदेश में संचरित होती हैं जिनमें से बाद के दो कला वेगों के व्यंजकों में दिशा निर्भरता है। इस विशिष्ट दशा में असाधारण विद्युतचुम्बकीय तथा ध्वनिक तरंगें बाह्य स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में विलुप्त हो जाती हैं और केवल एक तरंग, जो कि साधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग है, संचरित होती है।

(ई) अनन्त स्रोत आवृत्ति के लिए संचरण

अनन्त स्रोत आवृत्ति की दिशा में भी विक्षेपण सम्बन्ध तीन खंडों विभक्त हो जाता है। पहले दो खंड विद्युतचुम्बकीय तरंग के लिए समान कला वेग देते हैं।

$$v = c \quad (28 \text{ अ})$$

और तीसरा खंड ध्वनिक तरंग के लिए कला वेग देता है।

$$v^4 - (3U^2{}_{k11}\cos^2\theta + 2U^2{}_{k\perp}\sin^2\theta)\,v^2 + 5U^2{}_{k11}\,U^2{}_{k\perp}\cos^2\theta\sin^2\theta = 0 \quad (28 \text{ आ})$$

इस दशा में साधारण विद्युतचुम्कीय तरंग और असाधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग एकसाथ संचरित होती हैं तथा इनमें कोई अन्तर नहीं होता है। विद्युतचुम्बकीय तरंग तथा ध्वनिक तरंगें युग्मित न होकर एक दूसरे से स्वतंत्र अवस्था में संचरण करती हैं। समीकरण (28 आ) से पता चलता है कि इस दशा में केवल चार प्रकार की प्लाज़्मा तरंगें चलती हैं जिनमें से दो इलेक्ट्रान प्लाज़्मा तरंगें तथा दो आयन प्लाज़्मा तरंगें होती हैं।

(उ) अनन्त घूर्णन आवृत्ति की दशा में संचरण

जब घूर्णन आवृत्ति बहुत अधिक होती है तो $\frac{1}{R_k} \approx 0$, इस दशा में विक्षेपण मैट्रिक्स के अवयव:

$$D_{11}=\left(1-\frac{c^2}{v^2}\cos^2\theta\right)$$

$$D_{12}=-D_{21}=D_{23}=D_{32}=0$$

$$D_{13}=D_{31}=\frac{c^2}{v^2}\sin\theta\cos\theta$$

$$D_{22}=\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)$$

$$D_{33}=\left[\left(1-\frac{c^2}{v^2}\sin^2\theta\right)-\sum_k \frac{v^2}{\Omega^2 b_k(v^2-3u^2_{k11}\cos^2\theta)}\right]$$

$\hat{D}$ मैट्रिक्स का सारणिक निकालने पर दो खंड प्राप्त होते हैं :—

$$D_{22}=0 \tag{29 अ}$$

तथा

$$D_{11}D_{23}-D_{13}D_{31}=0 \tag{29 आ}$$

प्रथम खंड से

$$v=c \tag{30 अ}$$

प्राप्त होता है जो साधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग के कला वेग को सूचित करता हैं। द्वितीय खंड से निम्न घन समीकरण प्राप्त होता है।

$$v^6(\Omega^2-1-M)-v^4c^2\{\Omega^2-(1+M)\cos^2\theta+(\Omega^2-M)3r_{e11}\cos^2\theta$$
$$+(\Omega^2-1)3r_{i11}\cos^2\theta\}+v^2c^4\{(\Omega^2-M\cos^2\theta)3r_{e11}\cos^2\theta$$
$$+(\Omega^2-\cos^2\theta)3r_{i11}\cos^2\theta+9\Omega^2 r_{e11}r_{i11}\cos^4\theta\}-9c^6\Omega^2 r_{e11}r_{i11}\cos^4\theta=0 \tag{30 आ}$$

यह तीन घातीय विक्षेपण समीकरण है इसलिए प्राप्त कला वेग संशोधित विद्युतचुम्बकीय, संशोधित इलेक्ट्रॉन प्लाज़्मा तथा संशोधित आयन प्लाज़्मा तरंगों को निर्दिष्ट करते हैं। यदि $c \gg u_{e11} \gg u_{i11}$ तथा $1 \gg M$ है तो इस समीकरण को दो भागों में विभक्त कर सकते हैं।

$$v^2=c^2\frac{(\Omega^2-\cos^2\theta)}{(\Omega^2-1-M)};\qquad \begin{cases}\Omega^2>(1+M)\\ \Omega^2<\cos^2\theta\end{cases} \tag{31 अ}$$

तथा

$$v^4(\Omega^2-\cos^2\theta)-v^2c^2\{(\Omega^2-M\cos^2\theta)3r_{e11}\cos^2\theta+(\Omega^2-\cos^2\theta)3r_{i11}\cos^2\theta\}$$
$$+9r_{e11}r_{i11}c^4\Omega^2\cos^4\theta=0 \tag{31 आ}$$

$M \ll 1$ को ध्यान में रखते हुए समीकरण (31 आ) को भी हल कर सकते हैं।

$$v^2_{p_1} = 3U^2_{e11}\frac{\Omega^2 \cos^2\theta}{(\Omega^2 - \cos^2\theta)}; \qquad \Omega > \cos\theta \tag{32}$$

$$v^2_{p_2} = 3U^2_{e11}\,[\cos^2\theta\,(a_{11}+M) - \Omega^2]; \quad \Omega^2 < (a_{11}+M)\cos^2\theta \tag{33 अ}$$

$$= 3U^2_{e11}\cos^2\theta\,[a_{11}(a_{11}+M)]^{1/2}; \quad \Omega^2 = (a_{11}+M)\cos^2\theta \tag{33 आ}$$

$$= 3U^2_{i11}\frac{\Omega^2\cos^2\theta}{[\Omega^2 - \cos^2\theta\,(a_{11}+M)]}; \quad \Omega^2 > (a_{11}+M)\cos^2\theta. \tag{33 इ}$$

निष्कर्ष

हमने अल्पतापीय, अल्पघनत्व वाले उदासीन इलेक्ट्रॉन-आयन चुम्बकीय प्लाज़्मा को संचालित करते हुए समीकरणों के समुच्चय को लेकर विभिन्न तरंगों के लिए समांग द्विघातीय युग्मित समीकरण प्राप्त किये हैं। इन समीकरणों से विक्षेपण सम्बन्ध को एकतलीय तरंग मानकर ज्ञात किया है। इस विक्षेपण सम्बन्ध का अध्ययन करने से यह पता चलता है कि कुल छः प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं जिनमें से केवल चार तरंगें स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में संचरित होती हैं। इसमें दो विद्युतचुम्बकीय तथा अन्य दो प्लाज़्मा तरंगें हैं। इन प्लाज़्मा तरंगों के कला वेग ध्वनि वेग u_k के लम्बवत् अवयव पर निर्भर नहीं करते हैं। इसी प्रकार चार तरंगें स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में संचरित होती हैं लेकिन इनमें से दो प्लाज़्मा तरंगों के कला वेग ध्वनि वेग के लम्बवत् अवयव पर निर्भर होते हैं न कि समानान्तर अवयव पर। यदि स्रोत आवृत्ति को न्यूनतम कर दें तो केवल तीन प्रकार की तरंगें स्वच्छन्दतापूर्वक संचरित होती हैं जिनमें दो विद्युतचुम्बकीय तथा एक युग्मित इलेक्ट्रॉन-आयन प्लाज़्मा तरंगें हैं। लेकिन अनन्त स्रोत आवृत्ति के लिए पाँच प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं जिनमें एक विद्युत चुम्बकीय, दो इलेक्ट्रॉन प्लाज़्मा तथा दो आयन प्लाज़्मा तरंगें हैं। विद्युतचुम्बकीय तथा प्लाज़्मा तरंगें एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से संचरित होती हैं। इसी प्रकार अनन्त घूर्णन आवृत्ति की दशा में केवल चार तरंगें संचरित होती हैं। साधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग प्रत्येक स्रोत आवृत्ति के लिये c कला वेग से संचरित होती है लेकिन असाधारण विद्युतचुम्बकीय तरंग आवृत्ति के केवल $\Omega > (1+M)^{1/2}$ तथा $\Omega > \cos\theta$ प्रदेश में संचरित होती है। इलेक्ट्रॉन प्लाज़्मा तरंग $\Omega > \cos\theta$ आवृत्ति प्रदेश में संचरित होती है तथा आयन प्लाज़्मा तरंग प्रत्येक आवृत्ति के लिये संचरित होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० बी० एल० तालेकर, भौतिकी विभाग, मा० क्षे० अभि० महाविद्यालय, जयपुर का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने अपने परामर्श से सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. तालेकर, बी० एल० तथा रावत, एस० एस०, इंट० जर्न० इलक्ट्रॉन, 1968, 26, 29

2. तानेनबॉम, बी० एस०, फिजिक्स फ्लूडस, 1961, 4, 1262

3. एलिस, डब्ल्यू० पी०, बुश्चबॉम, एस० जे० तथा बर्स, ए०, Waves in anisotropic plasma, 1963, **एम० आई० टी० प्रस०, यू० एस० ए०**

4. शेशाद्री, एस० आर०, **रेडियो सा० जर्न० रिस० डी०**, 1965, **69**, 579

5. तालेकर, वी० एल० तथा रावत, एस० एस०, **इंट० जर्न० इलेक्ट्रान**, 1967, **23**, 253

6. बर्नस्टीन, आई० बी० तथा त्रिहान, एस० के०, **न्यूक्लि० फ्यूजन**, 1961, **1**, 3

7. ली, एस० डब्ल्यू०, लियांग, सी० तथा लो, वाई० टी०, **रेडियो सा०**, 1966, **1**, 815

8. तालेकर, वी० एल० तथा रावत, एस० एस०, **इंट० जर्न० इलेक्ट्रॉन**, 1970, **29**, 533

9. रावत, एस० एस०, **इंट०, जर्न० इलेक्ट्रॉन**, 1973, **35**

10. वही, **जर्न० इन्स्ट्० टेलिकॉम०** इन्जी०, 1973, **19**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 43-47

धान की रासायनिक संरचना पर फास्फोरस का प्रभाव

एम० एम० वर्मा तथा ए० पी० खेड़ा
शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार, इलाहाबाद

[प्राप्त—अक्टूबर 12, 1973]

सारांश

धान की NP_{22} किस्म गमलों में रोपी गयी और पौधों में फास्फोरस-पोषण का अध्ययन रासायनिक विश्लेषण द्वारा किया गया। यह पाया गया कि पौधों में नाइट्रोजन तथा फास्फोरस का उद्ग्रहण नियंत्रित पौधों से अधिक होता है। पौधों का कार्बन-नाइट्रोजन अनुपात नियंत्रित पौधों से कम रहता है। फास्फोरस उर्वरक के रूप में बेसिक स्लैग तथा सुपरफास्फेट का प्रयोग किया गया तथा 40, 60 तथा 100 दिनों के पश्चात् पौधों का रासायनिक विश्लेषण किया गया।

Abstract

Effect of phosphorus on chemical composition of paddy. *By* M. M Verma and A. P. Khera, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University, Allahabad.

NP_{22} variety of paddy was transplanted in pots to study the phosphate nutrition of the plants by their chemical analysis. The uptake of nitrogen and phosphorus was higher in plants than that of control plants but C/N ratios of the plants weɹe narrower in comparision to control plants. Basic slags and superphosphate were used as phosphatic fertilizers and the chemical analysis of the plants was conducted after 40, 60 and 100 days after germination.

पौधों के जीवन के लिए प्रमुख आवश्यक तत्वों में फास्फोरस का महत्वपूर्ण स्थान है। फास्फोरस-उर्वरकों के प्रयोग से बहुधा पौधों में नाइट्रोजन की मात्रा में असन्तुलन उत्पन हो जाता है[1-2]। सारेंसन[3] ने जई के पौधों में फास्फोरस के प्रयोग द्वारा प्रोटीन की मात्रा में विशेष वृद्धि प्रेक्षित की। फ्लेशकोव तथा फाउडेन[4] ने अपने प्रयोग में फास्फोरस-न्यून पौधों में ऐल्कोहल-विलेय नाइट्रोजन तथा अन्य अविलेय प्रभाजों की कमी देखी। उन्हें फास्फोरस के प्रचुर प्रयोग से नाइट्रोजन में वृद्धि प्राप्त हुई। इस दृष्टि से धान

के पौधों पर विभिन्न फास्फोरस उर्वरकों के प्रयोग द्वारा पौधों की नाइट्रोजन, कार्बन तथा फास्फोरस की मात्रा का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रत्येक गमले में शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार के पादप-गृह की सतही मिट्टी की 5 किलोग्राम मात्रा भरी गई। इसके पूर्व मिट्टी अच्छी तरह से सुखाई गई, पीस कर बारीक की गई तथा उससे सभी बाह्य पदार्थ निकाल दिये गये। फास्फोरस के अतिरिक्त सभी आवश्यक तत्वों की पूर्ति निम्मांकित तालिका के अनुसार की गई।

पोषण	प्रायोगिक रूप	दर प्रति एकड़
नाइट्रोजन	अमोनियम नाइट्रेट	60 पौंड नाइट्रोजन
पोटाश	पोटैशियम सल्फेट	80 ,, पोटाश
मैग्नीशियम	मैग्नीशियम सल्फेट	20 ,, मैग्नीशियम
लोहा	फेरस सल्फेट	10 ,, लोहा
मैंगनीज	मैंगनीज क्लोराइड	20 ,, मैंगनीज
जस्ता	जिंक क्लोराइड	25 ,, जस्ता
तांबा	कापर सल्फेट	15 ,, तांबा
मालिब्डनम	अमोनियम मालिब्डेट	2 ,, मालिब्डेट
बोरान	बोरेक्स	5 ,, बोरान

इसके पश्चात् 50 तथा 100 पौण्ड P प्रति एकड़ की दर से गमलों में सुपरफास्फेट (सुफा०), टाटा बेसिक स्लैग (टाबे०) एवं दुर्गापुर बेसिक स्लैग (दुबे०) के रूप में डाला गया। प्रत्येक गमले में धान की[4] पौद रोपी गयी। प्रत्येक की तीन प्रतिकृतियाँ रक्खी गईं। एक सेट नियंत्रित रक्खा गया जिसमें फास्फोरस की मात्रा शून्य थी। 40, 60 तथा 100 दिनों के पश्चात् गमलों में से एक-एक पौधे निकाल कर, सुखाकर, तौल लिये गये। पौधों में पूर्ण कार्बन, नाइट्रोजन तथा फास्फोरस की मात्रा मान्य प्रायोगिक विधियों[6] द्वारा ज्ञात की गई। धान की NP_{22} किस्म रोपी गयी।

सारणी 1

प्रयोग में प्रयुक्त मिट्टी का विश्लेषण

कार्बन	0·847%
नाइट्रोजन	0·071%
फास्फोरस	0·079%

पोटाश	1·11 %
मैग्नीशियम आक्साइड	0·52 %
कैल्सियम आक्साइड	1·00 %
लोह	4·21 %

संक्षेपण : टा० बे०=टाटा बेसिकस्लैग

दु० बे० =दुर्गापुर बेसिक स्लैग

सु० फा० =सुपरफास्फेट

(P_1)=फास्फोरस 50 पौण्ड प्रति एकड़

(P_2)= ,, 100 ,, ,,

(P_0)= ,, 0 ,, ,,

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 से ज्ञात होता है कि पौधों का शुष्क भार उन गमलों में अधिक है जिनमें फास्फोरस का प्रयोग किया गया है। 100 पौण्ड प्रति एकड़ की दर से फास्फोरस का प्रयोग 50 पौण्ड प्रति एकड़ की अपेक्षा अधिक प्रभावशाली है। फास्फोरस उर्वरकों की प्रभावोत्पादकता निम्न क्रममें पाई गई :

सुपर फास्फेट > टाटा बेसिक स्लैग > दुर्गापुर बेसिक स्लैग

फास्फोरस डालने पर नाइट्रोजन की मात्रा अधिक होने का कारण प्रोटीन की अधिकता हो सकती है। इस प्रयोग की पुष्टि राथैमस्टेड प्रयोगात्मक अनुसंधानशाला[7] के टमाटर के शोध कार्य द्वारा प्राप्त फलों के आधार पर की जा सकती है। टमाटर की पत्तियों में नाइट्रोजन की मात्रा 40% थी जिसमें नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटाश उर्वरक प्रयुक्त किये गये, किन्तु फास्फोरस की अनुपस्थिति में वही 3·6% थी । शाह तथा मेहता[8] ने भी बाजरा के पौधों में फास्फोरस के प्रयोग द्वारा अपरिष्कृत प्रोटीन मात्रा की अधिकता की पुष्टि की है।

नाइट्रोजन की भांति फास्फोरस की मात्रा भी धान के पौधों में फास्फोरस के प्रयोग से बढ़ जाती है। इसकी सम्भावना उपलब्ध फास्फोरस के अच्छी प्रकार से शोषण होने के कारण है । मूंक[9] ने जर्मनी की चारा फसलों में प्रोटीन की बृद्धि तथा फास्फोरस की मात्रा के मध्य जो सम्बंध स्थापित किया है वह है :

सारणी 2

धान के पौधों की रासायनिक संरचना

क्रम सं०	विवरण	शुष्क भार (ग्राम में)	कार्बन (%)	नाइट्रोजन (%)	फास्फोरस (%)	कार्बन-नाइट्रोजन अनुपात
40 दिनों बाद						
1.	नियंत्रण (P_0)	4·1	31·76	0·62	0·662	50·5
2.	टा० बे० (P_1)	5·0	31·78	0·65	0·690	48·5
3.	टा० बे० (P_2)	5·8	31·63	0·66	0·718	47·5
4.	दु० बे० (P_1)	4·8	31·31	0·63	0·683	49·0
5.	दु० बे० (P_2)	5·5	31·57	0·66	0·712	47·7
6.	सु० फा० (P_1)	5·3	31·92	0·65	0·700	47·0
7.	सु० फा० (P_2)	6·5	31·08	0·67	0·718	46·4
60 दिनों बाद						
1.	नियंत्रण (P_0)	9·3	28·7	0·50	0·53	57·4
2.	टा० बें० (P_1)	11·5	29·0	0·52	0·56	55·3
3.	टा० बे० (P_2)	13·6	28·9	0·53	0·58	53·8
4.	दु० बे० (P_1)	11·1	29·0	0·52	0·55	55·9
5.	दु० बे० (P_2)	13·1	28·9	0·53	0·58	54·0
6.	सु० फा० (P_1)	12·2	28·5	0·53	0·57	53·5
7.	सु० फा० (P_2)	14·1	28·2	0·54	0 59	52·8
100 दिनों बाद						
1.	नियंत्रण (P_0)	11·72	28·8	0·43	0·41	66.7
2.	टा० बे० (P_1)	13·1	28·7	0·44	0·43	65·4
3.	टा० बे० (P_2)	14·8	27·8	0·43	0·45	64·8
4.	दु० बे० (P_1)	12·8	28·8	0·43	0·42	65·9
5.	दु० बे० (P_2)	14·0	27·8	0·42	0·45	65·0
6.	सु० फा० (P_1)	14·3	28·5	0·44	0·47	64·3
7.	सु० फा० (P_2)	16·1	29·3	0·44	6·49	63·8

प्रोटीन की मात्रा	फास्फोरस की मात्रा
10% से अधिक	0·70%
8–10%	0·60%
8% के कम	0·50%

कार्बन की मात्रा भी प्रत्येक पौधे में ज्ञात की गई तथा इसका सम्बन्ध कार्बन-नाइट्रोजन अनुपात द्वारा अंकित किया गया है। पौधों की प्रथम 40 दिनों की आयु में कार्बन-नाइट्रोजन अनुपात कम है। पटनायक तथा नंदा[10] ने भी धान के पोषण के लिये फास्फोरस का महत्व सिद्ध किया है तथा बताय है कि फास्फोरस का प्रभाव प्रारम्भिक काल से फूलते समय तक अत्यधिक महत्वपूर्ण होता है।

निर्देश

1. मेयर, बी० एस० तथा एण्डरसन, डी० पी०, Plant Physiology, **वान नास्ट्रेण्ड एण्ड कम्प० न्यूयार्क, द्वितीय** संस्करण, (1952) पृ० 480
2. शाडी, ए०, हाफमैन, एम० तथा हैगिन, जे०, **पोटाश रिव्यू**, 1966, **8**
3. सोरेन्सन, सी, **प्लाण्ट एण्ड स्वायल**, 1959, **10**, 250
4. फ्लेशकोव, बी० पी० तथा फाउडेन, एल०, **नेचर (लंदन)**, 1959, **183**, 1445
5. इटन, एस० बी०, **बाटनी गजट**, 1950, **112**, 300
6. पाइपर, सी० एस०, Soil and Plant Analysis **इण्टर साइंस, न्यूयार्क** (1947)
7. रसेल, ई० जे०, Soil Condition and Plant growth **लांगमैन्स ग्रीन एण्ड कम्प० लि०** 1961
8. शाह, एच० सी० तथा मेहता, बी० बी०, **इण्डियन जर्न० एग्रि० साइंस** 1960, **30**, 115
9. मूंक, एच०, **एग्री० डाइजेस्ट, बेलजियम** 1967, **10**, 18
10. पटनायक, एस० तथा नंदा, बी० वी०, **इन्डि० जर्न० एग्रि० साइंस**, 1969, **39**, 341-52

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No 1, January 1974, Pages 49-51

SeO_2 अणु के उष्मागतिकी फलन

ए० आर० शुक्ल तथा वी० एस० कुशवाहा
स्पेक्ट्रोस्कोपी प्रयोगशाला, भौतिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 7, 1973]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में औषधीय महत्व के त्रिपरमाणविक अणु SeO_2 के उष्मागतिकी फलनों के परिगणित मान सूचित किये गये हैं।

Abstract

Thermodynamic functions of molecule SeO_2 *By* A. R. Shukla and V. S. Kushwaha, Spectroscopy Laboratory, Physics Department, Banaras Hindu University, Varanasi.

The object of this note is to report the calculated values of the thermodynamic functions of the tri-atomic molecule SeO_2, which is of medicinal importance.

कई कार्यकर्ताओं[1-7] ने SeO_2 अणु की आद्य अवस्था मूल आवृतियों को ज्ञात करने का प्रयास किया है किन्तु सभी परिणाम एक दूसरे से भिन्न हैं। केसैरो इत्यादि[8] ने आर्गन मैट्रिक्स में 965·6 सेमी$^{-1}$, 922·0 सेमी$^{-1}$ तथा 372·5 सेमी$^{-1}$ पर SeO_2 के 3 बैंडो की सूचना दी है जो क्रमशः असंमितीय कर्षण (Stretch), सममितीय कर्षण तथा वंकनकम्पन के अनुरूप हैं किन्तु बल क्षेत्र परिणामों से इन आवृतियों की पुष्टि नहीं हुई है। फिर भी टेकियो इत्यादि[9] द्वारा ज्ञात किये गये मानों से वंकन आवृतियों का मेल बैठता है।

SeO_2 के इलेक्ट्रानी स्पेक्ट्रमों का अध्ययन किया जा चुका है[10-14]। हाल ही में कुशवाहा[15] ने वाष्प प्रावस्था में SeO_2 अणु के उत्सर्जन स्पेक्ट्रम का अध्ययन किया है जिसमें परम्परागत π-प्रकार की विसर्जन नलिका का व्यवहार किया गया। उन्होंने आद्य अवस्था कर्षण तथा संयोजकता वंकन आवृतियों को क्रमशः 926 ± 4 सेमी$^{-1}$ तथा 366 ± 4 सेमी$^{-1}$ पाया। उन्हें SeO_2 में असंमितीय कर्षण नहीं मिला किन्तु जो आवृतियाँ उन्होंने सूचित की हैं वे केसरो इत्यादि[8] तथा टेकियो इत्यादि[9] द्वारा सूचित मानों से तालमेल खाती हैं।

किन्तु SeO_2 अणु के सम्बन्ध में स्पेक्ट्रोस्कोपी सूचनाओं के इस सर्वेक्षण में उष्मागतिकी फलनों का समावेश नहीं हो पाया जो इसके भौतिक गुणधर्मों के समझने में अत्यन्त महत्वपूर्ण है। फलतः कुशवाहा[15] की कर्षण तथा वंकन आवृतियों को और केसँरो[8] के असंमितीय कर्षण 965·6 सेमी$^{-1}$ का उपयोग उष्मा की मात्रा, एन्ट्रापी, मुक्त ऊर्जा, उष्माधारिता के मानों के परिगणन के लिये प्रयुक्त किया गया। प्रमुख जड़त्व आघूर्ण के गुणनफल के परिगणन के लिये पामर इत्यादि[3] तथा डुचेस्ने इत्यादि[13] द्वारा दी गई बन्ध दूरी का जो 1·61A° है तथा अन्तराबन्ध कोण का जो 130° है उपयोग किया गया। सममित संख्या 2 थी और अणुभार की गणना आक्सीजन तथा सेलीनियम के परमाणु भारों से, जो क्रमशः 15·99 तथा 78·96 हैं, ज्ञात की गई। केन्द्रिक भ्रमियों तथा समस्थानिकीय मिश्रण की उपेक्षा की गई। 100°K से 1000°K के परास में संगणित मान सारणी 1 में दिये जा रहे हैं।

सारणी 1

SeO_2* के उष्मागतिकी फलन				
T°K	$\frac{H-H_0}{T}$	$-\frac{F-F_0}{T}$	S°	C_p^0
100	9·2440	54·4164	64·8658	0·2901
200	9·7184	56·9734	67·5040	1·3569
300	10·1433	58·7968	69·5040	2·4515
400	10·4819	60·3325	71·2909	3·3654
500	10·7947	61·8869	72·8695	4·0368
600	11·0677	63·2046	74·1706	4·4998
700	11·2725	64·2130	75·4863	4·8283
800	11·4620	65·1388	76·5968	5·1105
900	11·6260	66·2034	77·6714	5·2306
1000	11·7911	66·7778	78·5668	5·3615

*सभी मान कै० मोल$^{-1}$ अंश$^{-1}$ इकाइयों में हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० सी० एम० पाठक के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने विवेचना करते समय बहुमूल्य सुझाव दिये। वे यू० जी० सी० तथा सी० एस० आई० आर० के भी आभारी हैं जहाँ से आर्थिक सहायता प्राप्त हुई।

निर्देश

1. हर्जबर्ग, जी०, "Elctronic spectra of Polyatomic molecules" डी वान नास्ट कम्पनी 1966.
2. वही, "Infrared and Raman spectra of Polyatomic Molecules" डी० वान नास्ट कम्पनी 1950.
3. पामर, के० जी० तथा इलियट, टी०, जर्न० अमे० केमि० सोसा०, 1938, 60, 1389.
4. मककुलो, जे० डी०, वही, 1937, **59**, 787.
5. गर्डिंग एच०, Rec. Tran. Chim., 1941, **60**, 728.
6. वेंकटेश्वरन, सी० एस०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस, 1936, **A3**, 533.
7. गिगेरे, पी० ए० तथा फाल्क, एम०, स्पेक्ट्रोकिम० एक्टा, 1960, **16**, 1.
8. केसैरो, एन० एन०, स्गोलिट, एम०, हेनचिफे, ए० जे० तथा ग्रागडेन, जे० एस०, जर्न० केमि० फिजि० (स्वीकृत)
9. टेकियो, एच०, हिरोटा, ई० तथा मोरिनो, वाई, जर्न० माले० स्पेक्ट्रो०, 1972, **41**, 420.
10. अंसुदी, आर० के०, जान खान, एम० तथा सैमुयेल, आर०, प्रोसी० रायल सोसा०, 1936, **A157**, 28.
11. (a) ईवान्स, एफ० एफ०, नेचर, 1930, **125**, 528.
    (b) हरनाथ, पी० बी० वी० तथा शिवराममूर्ति, वी०, इण्डियन जर्न० फिजि०, 1961, **35**, 599.
12. पियाव चूंग-शिन, सी० आर० अके० साइं० (पेरिस) 1936, **202**, 127; 1936, **203**, 239.
13. डुचेस्ने, जे० तथा रोजेन, बी०, फिजिका, 1941, **8**, 540.
14. वही, जर्न० केमि० फिजि०, 1947, **15**, 631.
15. कुशवाहा, वी० एस०, पीएच०-डी० थीसिस, बनारस हिन्दू यूनीवर्सिटी, 1972.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 53-56

इन्डियम (III)-लैक्टेटों का ऊष्मागतिक अध्ययन

पी० बी० चक्रवर्ती तथा एच० एन० शर्मा
रसायन विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त— सितम्बर 7, 1973]

सारांश

इन्डियम (III)-लैक्टिक अम्ल निकाय का ऊष्मागतिक-अध्ययन 30° से० तथा 0·1M सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में किया गया। प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण ऊष्मागतिक-फलन, $\triangle F_1 = -5{\cdot}065$ कि०कै०/मोल, $\triangle H_1 = 2{\cdot}761$ कि०कै०/मोल, $\triangle S_1 = 7{\cdot}604$ कै०/अंश/मोल, $\triangle \mathcal{F}_3 = -13{\cdot}77$ कि०कै०/मोल, $\triangle \mathcal{H}_3 = -7{\cdot}461$ कि०कै०/मोल, तथा $\triangle \xi_3 = 20{\cdot}82$ कै०/अंश/मोल प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Thermodynamic study of Indium(III)-lactate. *By* P. B. Chakravarti, Chemistry Department, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal and H. N. Sharma, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

Thermodynamic study of Indium (III)-lactic acid system has been done at 30°C and in 0·1M sodium perchlorate medium. The first-step and the overall thermodynamic functions calculated are found to be, $\triangle F_1 = -5{\cdot}065$ Kcals/mole, $\triangle H_1 = -2{\cdot}761$ Kcals/mole, $\triangle S_1 = 7{\cdot}604$ cals/degree/mole, $\triangle \mathcal{F}_3 = -13.77$ Kcals/mole, $\triangle \mathcal{H}_3 = -7{\cdot}461$ Kcals/mole and $\triangle \xi_3 = 20{\cdot}82$ cals/degree/mole.

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के धातु आयनों के साथ बनने वाले कीलेटों के अध्ययन-क्रम में[1-4] हमने अपने पूर्व शोध-पत्र[4] में इन्डियम (III) तथा लैक्टिक अम्ल के साथ विलयन में 1:1, 1:2 तथा 1:3 कीलेटों के निर्माण की सूचना तथा 30°C से० पर और 0·1M सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में इन कीलेटों के जेरम विधि द्वारा परकलित स्थायित्व-स्थिरांकों के मान दिये थे। प्रस्तुत शोध-पत्र में इन्डियम (III)-लैक्टिक अम्ल निकाय का ऊष्मागतिक अध्ययन प्रस्तुत किया जा रहा है।

प्रयोगात्मक

इन्डियम सल्फेट (शुचार्ड्ट मचेन), लैक्टिक अम्ल [रोडिया रोन पॉलेन्क (फ्रांस)], परक्लोरिक अम्ल (रीडेल), सोडियम परक्लोरेट (रीडेल), सोडियम हाइड्रॉक्साइड (मर्क) के कार्बनडाइऑक्साइड मुक्त जल में बनाये गये विलयन उपयोग में लाये गये। उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों द्वारा किया गया।

पी-एच मापन के लिये 'सिस्ट्रॉनिक्स', टाइप-322, पी-एच मापी उपयोग में लाया गया। सारे पी-एच अनुमापन एक विशेष प्रकार की 100 मिली० आयतन की सेल में किये गये, जिसे स्थिर ताप पर रखने के लिये, बाहरी जैकेट में, स्थिर ताप वाले जल स्थिरतापी (थर्मोस्टेट) से लगातार परिसंचरित किया गया। प्रत्येक समय पाठ्यांक लेने के पूर्व अभिक्रिया-मिश्रण को चुंबकीय-विधि से हिलाया गया।

परिणाम एवं विवेचना

प्रस्तुत प्रपत्र में इन्डियम (III) तथा लैक्टिक अम्ल के जलीय विलयन निकाय से संबद्ध ऊष्मा-गतिक-फलन, प्राप्यतम ऊर्जा, $\triangle F$, ऐन्थाल्पी, $\triangle H$, तथा एन्ट्रॉपी, $\triangle S$, 0·1M सोडियम परक्लोरेट माध्यम में 30°C पर परिकलित किये गये हैं।

प्राप्यतम ऊर्जा : प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण प्राप्यतम ऊर्जा निकालने के लिये वान्टहॉफ आइसोथर्म से प्राप्त क्रमशः (1) तथा (2) समीकरणों का उद्योग किया गया :

$$\triangle F_1 = -RT \log K_1 \quad (1)$$

$$\triangle \mathcal{F}_2 = -RT \log \beta_3 \quad (2)$$

जहाँ $\triangle F_1$ तथा $\mathcal{F}_3$ क्रमशः प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण प्राप्यतम ऊर्जा परिवर्तनों और K_1 तथा β_3 क्रमशः प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण स्थायित्व-स्थिरांकों को प्रदर्शित करते हैं। T परम-ताप को प्रदर्शित करता है।

इस हेतु $\log K_1$ तथा $\log \beta_3$ के मान जेरम विधि द्वारा प्राप्त किये गये[4], जो क्रमशः 3·65 तथा 9·92 पाये गये। समीकरण (1) तथा (2) के उपयोग से परिकलित प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण प्राप्यतम ऊर्जा परिवर्तनों के मान क्रमशः –5·065 कि०कै०/मोल तथा –13·77 कि० कै०/मोल प्राप्त हुए हैं।

ऐन्थॉल्पी : प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण ऐन्थॉल्पी-परिवर्तनों के परिकलन के लिए आइसोबार-समीकरण (3) तथा (4) का उपयोग किया।

$$\frac{d \log K_1}{d(1/T)} = \frac{\triangle H_1}{4{\cdot}57} \quad (3)$$

$$\frac{d \log \beta_3}{d(1/T)} = \frac{\triangle \mathcal{H}_3}{4{\cdot}57} \qquad (4)$$

जहाँ, $\triangle H_1$ तथा $\triangle \mathcal{H}_3$ क्रमशः प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण ऐन्थॉल्पी-परिवर्तन हैं ।

इस हेतु, 30°[4], 40° तथा 50° से० तापों पर $0{\cdot}1M$ सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में विभिन्न पदों के तथा सम्पूर्ण अभिक्रिया के स्थायित्व-स्थिरांकों के मान कैल्विन-जेरम विधि[5] द्वारा प्राप्त किये गये जो इस प्रकार हैं :

	$\log K_1$	$\log K_2$	$\log K_3$	$\log \beta_3$
30°C	3·65	3·32	2·95	9·92
40°C	3·61	3·30	2·90	9·81
50°C	3·55	3·2[illegible]	2·81	9·60

$\triangle H_1$ तथा $\triangle \mathcal{H}_3$ के मान परिकलित करने के लिये क्रमशः $1/T$ तथा $\log K_1$ के मानों और $1/T$ तथा $\log \beta_3$ के मानों के मध्य ग्राफ खींचे गये । ग्राफीय ढलों से प्राप्त $\triangle H_1$ तथा $\triangle \mathcal{H}_3$ के मान क्रमशः $-2{\cdot}761$ तथा $-7{\cdot}461$ कि०कै०/मोल पाये गये ।

एन्ट्रॉपी परिवर्तन : प्रथम पद तथा सम्पूर्ण एन्ट्रॉपी परिवर्तनों के परिकलन के लिये सर्वज्ञात गिब्ज़-हेल्मोल्ट्ज़ समीकरण से व्युत्पन्न, (5) तथा (6) समीकरणों का उपयोग किया गया ।

$$\triangle S_1 = \frac{\triangle H_1 - \triangle F_1}{T} \qquad (5)$$

$$\triangle \xi_3 = \frac{\triangle \mathcal{H}_3 - \triangle \mathcal{F}_3}{T} \qquad (6)$$

$\triangle S_1$ तथा $\triangle \xi_3$ क्रमशः प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण एन्ट्रॉपी परिवर्तन को प्रदर्शित करते हैं ।

समीकरण (5) तथा (6) के उपयोग से प्राप्त $\triangle S_1$ तथा $\triangle \xi_3$ के मान क्रमशः 7·604 तथा 20·82 कै०/अंश/मोल प्राप्त हुए हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक तत्कालीन-शोध में सहायता के लिये डॉ० पी० वी० खड़ीकर एवं मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय के प्राचार्य डॉ० एस० एन० कवीश्वर तथा आर्थिक सहायता के लिये विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के आभारी हैं ।

निर्देश

1. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा एच० एन०, **साइंस एण्ड कल्चर (मुद्रणस्थ)**
2. वही (प्रेषित)
3. वही (प्रेषित)
4. वही (प्रेषित)
5. केल्विन तथा विल्सन, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1945, **67,** 2003
   जेरम जे०, **'मेटल ऐमीन फार्मेशन इन ऐक्वस सोलूशन' पी० हास एण्ड संस, कोपनहेगन**, 1941

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 57-60

बोरिक अम्ल तथा मैनोस के मध्य जटिल-निर्माण का पराश्रव्यकी अध्ययन

श्याम बाबू श्रीवास्तव तथा शिव प्रकाश
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अक्टूबर 30, 1973]

सारांश

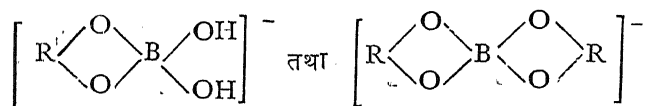
ध्वनि वेग मापन विधि द्वारा बोरिक अम्ल तथा मैनोस के बीच जटिल के निर्माण का तीन तापों पर अध्ययन किया गया है। संपीड्यता अवनमन तथा बोरेट के मोल प्रभाज में आरेख खींचने पर 0·5 तथा 0·33 मोल प्रभाजों पर वक्र में निम्निष्ठ पाया जाता है। इससे प्रकट होता है कि 1:1 तथा 1:2 जटिल बन रहा है जबकि ये अनुपात बोरेट और मैनोस के मोल प्रभाजों को प्रदर्शित करते हैं।

Abstract

Ultrasonic study of complexation between boric acid and mannose. *By* S. B. Srivastava and Sheo Prakash, Chemistry Department, Allahabad University.

Complex formation between mannose and boric acid has been studied by ultrasonic velocity measurement at three temperatures. Compressibility lowering vs mole fraction of borate graph shows minima at the mole fractions of 0·5 and 0·33 showing that borate and mannose form complex in the ratio 1:1 and 1:2.

बोरिक अम्ल में पॉली ऑक्सी यौगिकों के साथ संयोग करके जटिल बनाने का एक विशिष्ट गुण है। इधर कुछ वर्षों में शोधकर्त्ताओं ने विभिन्न विधियों[1-4] का प्रयोग करके इनका अध्ययन किया है। यह देखा गया है कि हाइड्रॉक्सी यौगिक में कम से कम दो OH समूहों का होना आवश्यक है जो 1—2 (या 1—3) सिस अवस्था में हों। हरमान्स[2] ने अपने परीक्षणों के आधार पर दो प्रकार के आयनों की उपस्थिति का संकेत दिया है :

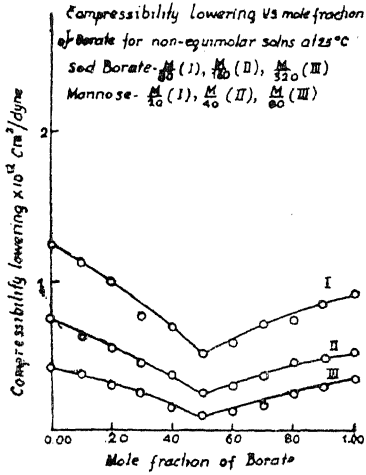
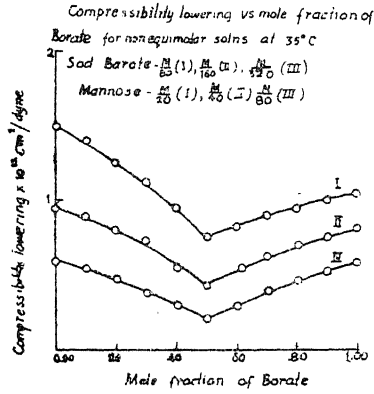
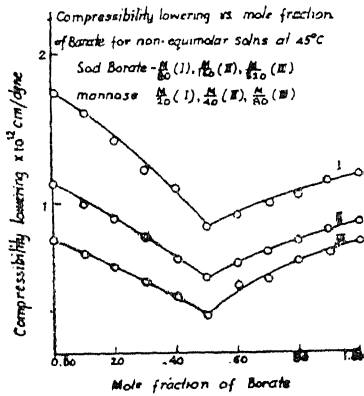
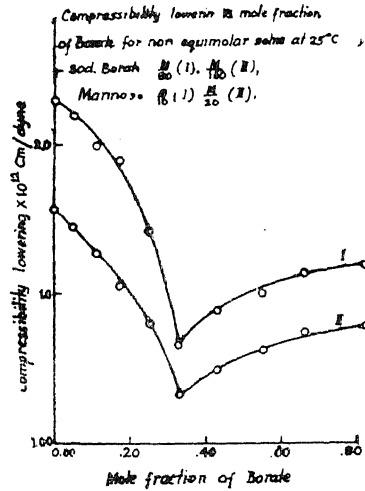
$$\left[R\langle^{O}_{O}\rangle B \langle^{OH}_{OH} \right]^- \quad \text{तथा} \quad \left[R\langle^{O}_{O}\rangle B \langle^{O}_{O}\rangle R \right]^-$$

जिन्हें क्रमशः HBD तथा HBD_2 अम्लों से प्राप्त माना जा सकता है। विभेदी विभव मूलक अनुमापन विधि का प्रयोग करके एन्टिकानेन[3] ने बोरिक अम्ल और ग्लिसरॉल निकाय का अध्ययन किया। प्राप्त आंकड़ों से निर्माण स्थिरांक की गणना की गई, जिससे यह निष्कर्ष निकला कि जटिलों की स्थिरता और OH समूह विन्यास में निश्चित सम्बन्ध पाया जाता है। सुजूकी[4] ने भी कुछ ऐसे ही परीक्षण किये तथा यह स्पष्ट कर दिया कि मुक्त बोरिक अम्ल में जटिल बनाने की क्षमता बहुत कम है क्योंकि इससे जल में प्राप्त BO_2^- आयनों की संख्या अत्यन्त कम है जबकि सोडियम बोरेट में यह संख्या अत्यधिक है। अतः बोरेट में इस क्षमता का अधिक होना तर्कसंगत है। निष्कर्ष यह है कि दोनों अवयवों में से एक का आयनी रूप में होना आवश्यक है। प्रस्तुत शोध पत्र में सोडियम बोरेट तथा मैनोस निकाय का अध्ययन ध्वनि वेग की माप द्वारा किया गया है।

प्रयोगात्मक

आसुत जल को पुनः क्षारीय परमैंगनेट की उपस्थिति में आसवित किया गया। इस प्रकार प्राप्त जल को ही समस्त प्रामाणिक विलयन तैयार करने में प्रयुक्त किया गया। मैनोस के विलयन को 24 घण्टे रखने के बाद प्रयोग में लाया गया। विभिन्न संघटनों के विलयन बनाने के लिये जॉब की सतत् परिवर्ती विधि अपनाई गई। सोडियम बोरेट तथा मैनोस का मिश्रण प्राप्त कर लेने के बाद उसका पी-एच 9·4 पर ला दिया गया और 1 घण्टा के लिये रख छोड़ा गया। इस समय के पश्चात् उसका पी-एच पुनः नापा गया। यदि थोड़ा बहुत परिवर्तन पाया गया तो उसे पुनः समंजित कर दिया गया। फिर पी-एच में परिवर्तन नहीं हुआ। सभी विलयनों को तापस्थापी में रखा गया जिससे उनका ताप 25°C हो जाय। एक विशेष प्रकार से निर्मित पात्र में विलयन रख कर चारों ओर से प्रायोगिक ताप पर जल प्रवाहित किया गया। 5Mc/Sec आवृत्ति पर प्रकाश विवर्तन की विधि[5] से इन विलयनों में ध्वनि का वेग निकाला गया। ध्वनि का स्रोत एक जनित्र था जिसमें दोलित्र इकाई तथा 1 इंच व्यास का स्वर्ण लेपित क्वार्ट्ज़ ट्रांसड्यूसर था। उपयुक्त फिल्टर की सहायता से मरकरी लैम्प द्वारा प्राप्त 2656·6A° तरंग दैर्ध्य का प्रकाश पुंज ध्वनि तरंगों के लम्बवत् डाला गया। एकवर्णी फ्रिंज का फोटोग्राफ लेकर प्रथम कोटि की फ्रिंजों के बीच की दूरी को एक संतोलक द्वारा ज्ञात किया गया। ध्वनि ज्ञात हो जाने पर विलयन की संपीड्यता β की गणना $\beta = \frac{1}{\rho c}$ व्यंजक की सहायता से की गई जहाँ c ध्वनि वेग और ρ विलयन का आपेक्षिक घनत्व है जिसे आपेक्षिक घनत्व बोतल की सहायता से निकाला गया। ध्वनि के वेग में संभावित त्रुटि $\pm 0{\cdot}15\%$ है। जल की संपीड्यता में से विलयन की संपीड्यता घटा देने से संपीड्यता अवनमन ज्ञात हो गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणामों को आरेख द्वारा प्रकट किया गया है। चित्र 1, 2 तथा 3 में संपीड्यता अवनमन और सोडियम बोरेट के मोल प्रभाज के बीच 25°, 35° तथा 45°C पर आरेख खींचा गया है। चित्रों से विदित होता है कि सोडियम बोरेट के 0·5 मोल प्रभाज पर संपीड्यता अवनमन का मान

न्यूनतम है जिससे सोडियम बोरेट और मैनोस के 1:1 जटिल बनने की पुष्टि होती है। चित्र 4 में यह संपीड्यता अवनमन सोडियम बोरेट के 0·33 मोल प्रभाज पर न्यूनतम है अतः 1:2 जटिल की पुष्टि

चित्र 1 चित्र 2

चित्र 3 चित्र 4

होती है। ध्वनि वेग और संपीड्यता के अध्ययन से यह स्पष्ट हो चुका है कि दो ऐसे अवयवों के, जिनमें आपस में अन्योन्य क्रिया नहीं होती है, मिश्रण का संपीड्यता मान दोनों अवयवों के आनुपातिक मध्यमान के बराबर होगा। परन्तु यदि इसके विपरीत उनमें आपस में कोई अन्योन्य क्रिया हो रही है तो संपीड्यता का मान आनुपातिक मध्यमान से अधिक हो जाता है क्योंकि मिश्रण में मुक्त आयनों की संख्या में कमी हो जाती है। अतः प्रस्तुत अध्ययन में सोडियम बोरेट के 0·5 और 0·33 मोल अंशों

पर संपीड्यता अवनमन का न्यूनतम होना यह निश्चित कर देता है कि उनके 1:1 और 1:2 के अनुपात में जटिल निर्माण हो रहा है।

बोरॉन की संयोजकता 3 है और एक आर्बिटल मुक्त है जो जटिल यौगिक के निर्माण में सहायक होता है। जलीय घोलों में बोरॉन का OH समूह के साथ संयोग करने की क्षमता अन्य समूहों की तुलना में कहीं अधिक है। हेक्सोसों की जटिल बनाने की क्षमता उनकी संरचना पर निर्भर करती है। जल में ये लैक्टल रूप में पाये जाते हैं तथा α और β रूपों में एक दूसरे के सन्तुलन में उपस्थित रहते हैं। हेक्सोस की लैक्टल रूप की मात्रा जल के पी-एच पर निर्भर करती है अतः जटिल के स्थायित्व पर पी-एच का निश्चित प्रभाव पड़ता है। लैक्टल रूप में 1—C परमाणु से सम्बन्धित OH समूह संभवतः भाग लेता है।

निर्देश

1. सूट्रा जी० तथा दारम्वा ई०, **बुले० सोसा०किम० बेल्जि०**, 1953, **62**, 104.
2. हरमान्स पी० एच०, **सा०अनार्ग० अलगे० केमि०**, 1925, **142**, 83.
3. एन्टिकानेन पी० जे०, **सुओमेन केमिस्टिस्ती**, 1956, **B29**, 179.
4. सुजूकी वाई०, **बुले० केमि० सोसा० जापान**, 1941, **16**, 23.
5. डिबाई पी० तथा सियर्स एफ० डब्लू०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० यू० एस० ए०**, 1932, **18**, 410.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 61-63

समाकल समीकरण पर दो प्रमेय

बी० के० जोशी
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरिंग तथा टेकनिकल कालेज, रायपुर

[प्राप्त—फरवरी 9,1973]

सारांश

संवलन प्रकार के एक समाकल समीकरण का हल अष्टि के रूप में बेसेल फलन का उपयोग करते हुये लैप्लास परिवर्त के प्रति प्राप्त किया गया है।

Abstract

Two theorems on an integral equation *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur.

An integral equation of convolution type with respect to Laplace transform has been solved with Bessel function as its kernel.

1. विषय प्रवेश :

समाकल समीकरण

$$\int_0^x k(x-t)g(t)\,dt = f(x) \tag{1·1}$$

विडर[4] द्वारा हल किया जा चुका है यदि अष्टि $k(x)$ लागेर बहुपदी हो। संक्रियात्मक कलन की उन्हीं विधियों का अनुसरण करते हुये सिंह[3] ने (1·1) का हल प्रस्तुत किया है जिसकी अष्टि केल्विन फलन के रूप में हो। रूसिया[2] ने उसे ही $t^{1/2\nu} J_\nu(2a^{1/2}t^{1/2})$ तथा $t^{\nu/2} I_\nu(2a^{1/2}t^{1/2})$ के साथ अष्टि फलन के रूप निकालने का प्रयत्न किया है। प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य (1·1) को $t^\nu J_\nu(t)$ अष्टि के रूप में मानते हुये हल करना है।

$f(t)$ के लैप्लास परिवर्त की परिभाषा

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad Re\, p > 0 \tag{1·2}$$

द्वारा दी जाती है यदि समाकल अभिसारी हो। सम्बन्ध (1·2) को हम $f(t) \doteq F(p)$ द्वारा अंकित करेंगे।

यदि $f(t) \doteq F(p)$, तो

$$D^n[f(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots f^{n-1}(0). \tag{1·3}$$

जहाँ
$$D \equiv \frac{d}{dt}$$

निम्नांकित फल (1, p. 131, 182) से ज्ञात हैं और आगे इनका व्यवहार किया जावेगा।

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du = \phi_1(p) \phi_2(p) \tag{1·4}$$

जहाँ $f_1(t) \doteq \phi_1(p)$ तथा $f_2(t) \doteq \phi_2(p)$

$$t^\nu J_\nu(t) \doteq 2^\nu \pi^{-1/2} \surd(\nu + \tfrac{1}{2}) (p^2+1)^{-(2\nu+1)/2}$$

$$\nu > -\tfrac{1}{2} \tag{1·5}$$

$$t^\nu I_\nu(t) \doteq 2^\nu \pi^{-1/2} \surd(\nu + \tfrac{1}{2}) (p^2-1)^{-(2\nu+1)/2}$$

$$\nu > -\tfrac{1}{2} \tag{1·6}$$

2. प्रमेय I :

(i) यदि फलन $f(x)$ तथा इसके प्रथम $(2\nu+2)$ व्युत्पन्न $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में प्रभागशः संतत हों।

(ii) ν एक अनृण पूर्णांक है तथा $f^m(o) = 0$ यदि $m = 0, 1, \dots (2\nu+1)$ ।

तब समाकल समीकरण

$$\int_0^x (x-t)^\nu J_\nu(x-t) g(t) dt = f(x) \tag{2·1}$$

का हल निम्न प्रकार होगा :

$$g(x) = A \int_0^x J_0(x-t) (D^2+1)^{\nu+1} f(t) dt \tag{2·2}$$

यदि $0 \leqslant x < x_1$

जहाँ
$$A = \pi^{1/2} 2^{-\nu} / \surd(\nu + \tfrac{1}{2}) \tag{2·3}$$

उपपत्ति :

माना $f(t) \doteq F(p)$ तथा $g(t) \doteq G(p)$

तो उपर्युक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (2·2) से

$$(D^2+1) f(t) \doteq (p^2+1) F(p)$$

की प्राप्ति होगी। अब (1·4) तथा (1·5) के सन्दर्भ में (2·1) का लैप्लास परिवर्त लेने पर तथा फल को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=\frac{A}{(p^2+1)^{1/2}}(p^2+1)^{\nu+1}F(p)$$

इस प्रकार लैप्लास विलोमन से (2·2) की प्राप्ति होती है।

प्रमेय II :

(i) यदि फलन $f(x)$ तथा इसके प्रथम $(2\nu+2)$ व्युत्पन्न $0\leqslant x<x_1<\infty$ में प्रभागशः संतत हों

(ii) $f^m(o)=0$ यदि $m=0, 1, \ldots (2\nu+1)$

(iii) ν एक अनृण पूर्णांक हो तो समाकल समीकरण

$$\int_0^x (x-t)^\nu I_\nu(x-t)g(t)dt=f(x) \tag{2·4}$$

का हल निम्न प्रकार होगा :

$$g(x)=A\int_0^x I_0(x-t)(D^2-1)^{\nu+1}f(t)dt \tag{2·5}$$

यदि $0\leqslant x<x_1$

जहाँ A का मान (2·3) से प्राप्त किया जाता है।

प्रमेय II की उत्पत्ति प्रमेय I की ही भाँति की जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० शर्मा के प्रति मार्गदर्शन हेतु और वी० वी० सारस्वत, प्रिंसिपल के प्रति समुचित सुविधायें प्रदान करने के हेतु आभारी है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transform, 1954 **भाग I**, **मैकग्राहिल प्रकाशन**
2. रूसिया, के० सी०, The Mathematics Education, **भाग V**, **संख्या** 4, पृष्ठ 92-95.
3. सिंह, सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1969, **39**(III), 279-80.
4. विडर, डी० वी०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291-93.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 65-70

मध्यवर्ती छिद्र युक्त एक पतली सुघट्य वृत्ताकार पट्टिका में संमितीय अवमन्दित कम्पन

बी० एस० मेहता
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय शाहपुरा, राजस्थान

[प्राप्त—सितम्बर 8, 1972]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में समाकल परिवर्तों के सिद्धान्त का उपयोग करते हुये केन्द्र में छिद्र वाली एक पतली सुघट्य वृत्ताकार पट्टिका में अनुप्रस्थ, संमितीय, अवमन्दित कम्पनों की समस्या का समाधान प्रस्तुत किया जा रहा है।

Abstract

Symmetrical damped vibrations of a thin elastic circular plate having a hole at the centre. *By* B. S. Mehta, Department of Mathematics, Government College, Shahpura, Rajasthan.

In this study, the problem of transverse, symmetrical damped vibrations of a thin elastic circular plate having a hole at the centre is solved making use of the theory of integral transforms.

1. भूमिका

सिनेली[2] ने आन्तरिक तथा वाह्य अवमन्दन से युक्त वृत्ताकार पट्टिकाओं तथा धरनों के गतिज आवरण का अध्ययन किया है। शर्मा[5] ने सुघट्य नींव पर रखी हुई आयताकार पट्टिकाओं की गतिज अनुक्रिया की व्याख्या की है और अवमन्दन पर विचार किया है। मार्ची तथा डायाज[3] ने अवमन्दन तथा सुघट्य नींव की अनुपस्थिति में मात्र आश्रित तथा क्लैम्प किये हुए परिसीमा प्रतिबन्धों में एक पतली सुघट्य पट्टिका के वृत्ताकार शीर्ष पर लघु अनुप्रस्थ कम्पनों की समस्याओं का हल प्रस्तुत किया है। शर्मा[4] ने केन्द्र में छिद्र युत वृत्ताकार पट्टिका में, जो सुघट्य नींव पर रखी थी, अवमन्दित कम्पनों का अध्ययन किया है।

हम केन्द्र में छिद्र से युक्त एक पतली सुघट्य वृत्ताकार पट्टिका जो एक सुघट्य नींव पर टिकी है और आन्तरिक तथा वाह्य परिसीमाओं पर कसी है, उसमें अनुप्रस्थ सममितीय अवमन्दित कम्पनों का अध्ययन प्रस्तुत कर रहे हैं।

2. समस्या का सूत्रीकरण

यहाँ हम एक पतली सुघट्य b त्रिज्या वाली वृत्ताकर पट्टिका में जिसमें a त्रिज्या का समकेन्द्री छिद्र है अवमन्दित कम्पनों पर विचार करेंगे। यह पट्टिका भीतरी तथा बाहरी परिसीमाओं पर कसी हुई है और एक सुघट्य नींव पर टिकी है। इसमें अनुप्रस्थ भारण $Z(r. t)$ के कारण बलकृत कम्पन उत्पन्न होते हैं। अपरूपण तथा घूर्णनी जड़त्व के कारण उत्पन्न विक्षेपों के प्रभाव की उपेक्षा की गई है। नींव की प्रतिक्रिया को पट्टिका के विक्षेप के समानुपाती कल्पित कर लिया गया है। श्यान अवमन्दनयुत सुघट्य नींव पर टिकी भार-युत पट्टिका के अनुप्रस्थ कम्पनों का अवकल समीकरण निम्न प्रकार होगा :

$$D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^2 w+2\rho\, h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+C\frac{\partial w}{\partial t}+kw(r, t)=Z(r, t), \tag{2·1}$$

जहाँ ρ घनत्व, D उस पदार्थ की दृढ़ता जिससे पट्टिका बनी हो, $2h$ पट्टिका की मोटाई, C अवमन्दन गुणांक तथा k सुघट्य नींव का गुणांक है।

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध :

$$w(r, t)|_{t=0}=f_1(r),\ a\leqslant r\leqslant b \tag{2·2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w(r, t)|_{t=0}=f_2(r),\ a\leqslant r\leqslant b \tag{2·3}$$

परिसीमा प्रतिबन्ध :

प्लेट आन्तरिक तथा बाह्य परिसीमाओं में कसी हुई है अतः परिसीमा दशा निम्न प्रकार होगी :

$$w(a, t)=\frac{\partial}{\partial r}w(r, t)|_{r=a}=0,\ t>0 \tag{2·4}$$

$$w(b, t)=\frac{\partial}{\partial r}w(r, t)|_{r=b}=0\ t>0 \tag{2·5}$$

फल जिनकी आवश्यकता होगी :

मार्ची तथा डायाज[3] ने समाकल परिवर्त

$$T_{\phi_0}[f(r)]=\bar{f}(\xi_j)=\int_a^b rf(r)\phi_0(\xi_j r)dr \tag{2·6}$$

को परिभाषित किया है जहाँ

$$\phi_0(\xi_j r)=A_j J_0(\xi_j r)-B_j Y_0(\xi_j r)+C_j I_0(\xi_j r)-D_j K_0(\xi_j r) \tag{2·7}$$

इस प्रकार कि

$$A_j=\begin{vmatrix} Y_0(\xi_j b) & I_0(\xi_j b) & K_0(\xi_j b) \\ -Y_1(\xi_j a) & I_1(\xi_j a) & -K_1(\xi_j a) \\ -Y_1(\xi_j b) & I_1(\xi_j b) & -K_1(\xi_j b) \end{vmatrix}$$

$$B_j=\begin{vmatrix} J_0(\xi_j b) & I_0(\xi_j b) & K_0(\xi_j b) \\ -J_1(\xi_j a) & I_1(\xi_j a) & -K_1(\xi_j a) \\ -J_1(\xi_j b) & I_1(\xi_j b) & -K_1(\xi_j b) \end{vmatrix}$$

$$C_j=\begin{vmatrix} J_0(\xi_j b) & Y_0(\xi_j b) & K_0(\xi_j b) \\ -J_1(\xi_j a) & -Y_1(\xi_j a) & -K_1(\xi_j a \\ -J_1(\xi_j b) & -Y_1(\xi_j b) & -K_1(\xi_j b) \end{vmatrix}$$

$$D_j=\begin{vmatrix} J_0(\xi_j b) & Y_0(\xi_j b) & I_0(\xi_j b) \\ -J_1(\xi_j a) & -Y_1(\xi_j a) & -I_1(\xi_j a) \\ -J_1(\xi_j b) & -Y_1(\xi_j b) & -I_1(\xi_j b) \end{vmatrix}$$

तथा ξ_j आइगेन वैल्यू समीकरण के हल हैं :

$$\begin{vmatrix} J_0(\xi a) & Y_0(\xi a) & I_0(\xi a) & K_0(\xi a) \\ J_0(\xi b) & Y_0(\xi b) & I_0(\xi b) & K_0(\xi b) \\ -J_1(\xi a) & -Y_1(\xi a) & I_1(\xi a) & -K_1(\xi a) \\ -J_1(\xi b) & -Y_1(\xi b) & I_1(\xi b) & -K_1(\xi b) \end{vmatrix}=0 \tag{2·8}$$

(2·6) का विलोमन

$$T^{-1}_{\phi_0}[f(\xi_j)]=f(r)=\frac{\Sigma_j \bar{f}(\xi_j)}{\lambda_j}\phi_0(\xi_j r), \tag{2·9}$$

है जहाँ संकलन को आईगेन वैल्यू समीकरण (2·8) के समस्त धन आधारों के लिये विस्तारित कर दिया गया है और λ_j को

$$\lambda_j=\Big[\frac{r^2}{2}[Z_0^2(\xi_j r)+Z_1^2(\xi_j r)+\tilde{Z}_0^2(i\xi_j r)+\tilde{Z}_1^2(i\xi_j r)]$$

$$+\frac{r}{\xi_j}[Z_1(\xi_j r)\tilde{Z}_0(i\xi_j r)-iZ_0(\xi_j r)\tilde{Z}_1(i\xi_j r)]\Big]_a^b \tag{2·10}$$

द्वारा सूचित किया जाता है जहाँ

$$\phi_0'(\xi_j r)=\mathcal{Z}_0(\xi_j r)+\tilde{\mathcal{Z}}_0(i\xi_j r) \tag{2·11}$$

जिससे कि

$$\mathcal{Z}_q(\xi_j r)=A_j\mathcal{J}_q(\xi_j r)-B_j Y_q(\xi_j r)$$
$$\mathcal{Z}_\rho(i\xi_j r)=a_j\mathcal{J}_\rho(i\xi_j r)+b_j Y_\rho(i\xi_j r)$$

जहाँ

$$a_j=C_j-\frac{\pi}{2}\ iD_j \quad \text{तथा} \quad b_j=\frac{\pi}{2}\ D_j$$

(2·6) के क्रियात्मक गुण को

$$T_{\phi_0}\left[\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\right]^2 f(r)\ \right]=\xi_j^2\left[r\left[f(r)\frac{\partial}{\partial r}\ \mathfrak{C}_0(\xi_j r)-\mathfrak{C}_0(\xi_j r)\frac{\partial}{\partial r}f(r)\ \right]\right]_a^b+\xi_j^4\mathcal{J}(\xi_j) \tag{2·12}$$

द्वारा अंकित करते हैं जहाँ

$$\mathfrak{C}_0(\xi_j r)=\mathcal{Z}_0(\xi_j r)-\tilde{\mathcal{Z}_0}(i\xi_j r) \tag{2·13}$$

तथा $f(r)$ द्वारा डिरिक्लेट के प्रतिबन्धों की तुष्टि $a\leqslant r\leqslant b$ परास में होती है ।

फलन $V_1(t)$ के लैप्लास परिवर्त की परिभाषा निम्न रूप में दी जाती है [1, p. 3]

$$\bar{V}_1=(s)\int_0^\infty e^{-st}V_1(t)dt \tag{2·14}$$

अर्थात्

$$\overline{V_1}(s)\doteqdot V_1(t)$$

[1, p. 36] में लैप्लास प्रमेय परिवर्त को

$$\int_0^t V_1(t-v)V_2(v)dv\doteqdot\bar{V}_1(s)\bar{V}_2(s) \tag{2·15}$$

है यदि $V_1(t)$ तथा $V_2(t)$ प्रत्येक अन्तराल $0\leqslant t\leqslant T$ में तथा कोटि e^{wt} में जब $t\to\infty$ तथा $s>w$, खण्डश: संतत रहते हैं ।

हल :

चर r के लिये रूपान्तरण (2·6) का सम्प्रयोग समीकरण (2·1) में करने पर तथा (2·4), (2·5) और (2·12) के उपयोग से हमें

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\bar{w}(\xi_j t)+\frac{C}{2\rho h}\frac{d}{dt}\,w(\xi_j,t)+\left[\frac{D\xi_j^4+k}{2\rho h}\right]\bar{w}(\xi_j,t)=\frac{1}{2\rho h}\,\bar{Z}(\xi_j,t), \tag{216}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$\overline{Z}(\xi_j), t) = \int_a^b r\phi_0(\xi) j r) Z), t)\ dt \tag{2·17}$$

(2·16) को $\overline{w}(\xi_j, r)$ के लिये (2·14) (2·15), (2·2) तथा (2·3) का उपयोग करते हुये हल करने पर

$$\overline{w}(\xi_j, t) = \frac{1}{2\rho h a}\int_0^t \exp\left[-\frac{Cy}{4\rho h}\right] \sin(a y)\overline{Z}(\xi_j, t-y)\ dy$$

$$+\mathcal{J}_1(\xi_j)\exp\left[-\frac{Ct}{4\rho h}\right]\cos(at) + \left[\mathcal{J}_2(\xi_j) + \frac{C}{4\rho h}\mathcal{J}_1(\xi_j)\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{Ct}{4\rho h}\right]\frac{\sin at}{a}, \tag{2·18}$$

जहाँ

$$a^2 = \frac{1}{16\rho^2 h^2}\left[8\rho h(D\xi_j^4 + k) - C^2\right], \tag{2·19}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{J}_1(\xi_j)\\ \mathcal{J}_2(\xi_j)\end{matrix}\right| = \int_a^b \left.\begin{matrix} f_1(r)\\ f_2(r)\end{matrix}\right| r\phi_0(\xi_j r)\ dr \tag{2·20}$$

विलोमन श्रेणी (2·9) में (2·18) को रखने पर हमें जो हल प्राप्त होगा वह

$$w(r, t) = \Sigma_j \frac{1}{\lambda_j}\phi_0(\xi_j r)\left[\frac{1}{2\rho h a}\int_0^t \exp\left[-\frac{Cy}{4\rho h}\right]\right.$$

$$\times \sin(ay) Z(\xi_j, t-y)\ dy + \mathcal{J}_1(\xi_j)\exp\left[-\frac{Ct}{4\rho h}\right]\cos at$$

$$\left. + \left[\mathcal{J}_2(\xi_j) + C/4\rho b\ \mathcal{J}_1(\xi_j)\right]\exp\left[-\frac{C_t}{4\rho h}\right]\frac{\sin at}{a}\right], \tag{2·21}$$

है जहाँ समीकरण (2·8) के समस्त धन आधारों के लिये संकलन विस्तृत है

विशिष्ट दशा

फल (2·21) में ($k=0$, $C=0$, $D=2\rho h b^2$ रखने पर लोबीचील कम्पनों के प्रश्न का हल प्राप्त हो जाता है जिस पर मार्ची तथा डायाज[3] ने पतली प्लेटों के शीर्षों के लिये विचार किया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० सी० बी० राठी का आभारी है जिन्होनें उस शोध पत्र की तैयारी में रुचि ली है।

निर्देश

1. चर्चिल, आर० वी०, "Operational Mathematics", मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1958.
2. सिनेली जी, AEC Research and Development Report (1966), 1-30.
3. मार्ची, ई० तथा डायाज, एम०, Atti della Allademia, dellaS cienze di Torino 1966-67, **101,** 739-747.
4. शर्मा, के० डी०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1971, **14**, 39-43.
5. शर्मा, पी० सी०, बुले० इण्डि० सोसा० अर्थक्वेक टेक्नालाजी, 1965, **2**(2), 51-58.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 1, January, 1974, Pages 71-80

सार्वीकृत फाक्स के H-फलन तथा सार्वीकृत लेगेंड्र के सहचारी फलन वाले समाकल का मूल्यांकन

एफ० सिंह तथा एन० पी० सिंह
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—जून 2, 1972]

सारांश

इस टिप्पणी में एक ऐसे समाकल का मूल्यांकन किया गया है जिसमें सार्वीकृत लेगेंड्र सहचारी फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन तथा सार्वीकृत फाक्स के फलन सन्निहित हैं। इस समाकल का उपयोग सार्वीकृत H-फलन के लिये एक प्रसार सूत्र की स्थापना करने के लिये किया गया है। चूंकि दोनों तर्कों में H-फलन अत्यन्त व्यापक फलन के रूप में रहता है अत: प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त होती हैं।

Abstract

Evaluation of an integral involving generalised Fox's H-function and generalised Legendre associated function. *By* F. Singh and N.P. Singh, Department of Mathematics Government Science College, Rewa

The present note deals with the evaluation of an integral involving the generalised Legendre associated function, the generalised hypergeometric function and the generalised Fox's H-function. This integral has been employed to establish an expansion formula for the generalised H-function. As the H-function in two arguments is a very general function, the results on specialising the parameters lead to many interesting particular cases..

1. प्रस्तावना : माथुर [4, p. 215] ने सार्वीकृत H-फलन को दो तर्कों द्वारा मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया है :

$$H^{n, \nu_1, \nu_2, m_1, m_2}_{p, [t:t'], s, [q:q']} \left[\begin{array}{l|l} & \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s, d_s)\} \\ & \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{array} \right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\eta)x^{\xi}y^{\eta}d\xi d\eta, \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ
$$\phi(\xi+\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\epsilon_j+e_j\xi+e_j\eta)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\epsilon_j-e_j\xi-e_j\eta)\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+d_j\xi+d_j\eta)},$$

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(\beta_j-b_j\xi)\prod_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j+c_j\xi)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(\beta'_j-b'_j\eta)\prod_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma'_j+c'_j\eta)}{\sum_{j=m_1+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+b_j\xi)\prod_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma(1-\gamma_j-c_j\xi)\prod_{j=m_2+1}^{q'}\Gamma(1-\beta'_j+b'_j\eta)\prod_{j=\nu_2+1}^{t'}\Gamma(1-\gamma'_j-c'_j\eta)}$$

तथा $\{(A_m, B_m)\}$ द्वारा m प्राचलों के सेट $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_m, B_m)$ का बोध होता है

$$0\leqslant m_1\leqslant q,\ 0\leqslant m_2\leqslant q',\ 0\leqslant \nu_1\leqslant t,\ 0\leqslant \nu_2\leqslant t',\ 0\leqslant n\leqslant p.$$

प्राचलों का अनुक्रम $\{(\beta m_1, bm_1)\},\{(\beta' m_2, b' m_2)\}\{(\gamma\nu_1, c\nu_1)\},\{(\gamma'\nu_2, c'\nu_2)\}$ तथा $\{(\epsilon n, en)\}$ ऐसा है कि समाकल्य का कोई पोल संगमी नहीं है। आवश्यकता हुई तो समाकलन का पथ इस प्रकार निर्दिष्ट किया जाता है कि $\Gamma(\beta_j-b_j\xi)(j=1, 2, \ldots, m_1)$ तथा $\Gamma(\beta'_k-b'_k\eta)(k=1, 2, \ldots, m_2)$ के समस्त पोल $\Gamma(\gamma_j+c_j\xi)(j=1, 2, \ldots, \nu_1)$ के दाईं ओर और $\Gamma(\gamma'_k+c'_k\eta)(k=1, 2, \ldots, \nu_2)$ तथा $\Gamma(1-\epsilon_j+e_j\xi+e_j\eta)(j=1, 2, \ldots, n)$ के समस्त पोल काल्पनिक अक्ष के बाईं ओर पड़ें। समाकल्य अभिसारी होता है यदि

$$\lambda>0,\ \lambda'>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\lambda\pi,\ |\arg y|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi,$$

जहाँ
$$\lambda=\sum_{j=1}^{m_1}b_j+\sum_{j=1}^{\nu_1}c_j+\sum_{j=1}^{n}e_j-\sum_{j=m_1+1}^{q}b_j-\sum_{j=\nu_2+1}^{t'}c_j-\sum_{j=n+1}^{p}e_j-\sum_{j=1}^{s}d_j$$

तथा
$$\lambda'=\sum_{j=1}^{m_2}b'_j+\sum_{j=1}^{\nu_2}c'_j+\sum_{j=1}^{n}e_j-\sum_{j=m_2+1}^{q'}b'_j-\sum_{j=\nu_2+1}^{t'}c'_j-\sum_{j=n+1}^{p}e_j-\sum_{j=1}^{s}d_j.$$

(1·1) को हम संकेत रूप में $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ द्वारा अंकित करेंगे। माथुर [4, p. 218] ने x तथा y के अल्प मान के लिये $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ के आचरण की व्याख्या की है।

$$H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=O(|x|^{\beta}|y|^{\beta'}) \text{ जब } x\to0,\ y\to0$$

जहाँ
$$\beta=\min R\left(\frac{\beta_h}{b_h}\right) \text{ तथा } \beta'=\min R\left(\frac{\beta'_t}{b'_t}\right)$$

$(h=1, 2, \ldots, m_1; t=1, 2, \ldots, m_2)$ तथा

$$\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{t} c_j - \sum_{j=1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{s} d_j \equiv \delta > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{q'} b'_j - \sum_{j=1}^{t'} c' - \sum_{j=1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{s} d_j \equiv \delta' > 0,$$

म्यूलेनबेल्ड तथा कुइपर्स[3] ने सार्वीकृत लेगेंड्र सहचारी फलन $P_k^{m,n}(z)$ को प्राचलों के सार्व मानों (सत्य या संकुल) के लिये (पोछामर के) समाकलों के पदों में परिभाषित किया है और इन्हें ही हाइपरज्यामितीय फलनों में रूपान्तरित कर दिया गया है । k, m, n तथा z प्राचलों के सम्बन्ध में कल्पनायें करने से आगे और रूपान्तरणों की सृष्टि हुई । उदाहरणार्थ यदि x ऐसा पूर्णांक $\geqslant 0$ हो तथा $k-\frac{m-n}{2}$ अनृण पूर्णांक हो तो $|1-x|<2$ के लिये

$$P^{m,n}_{k-(m-n)1/2}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}(1+x)^{n/2}(1-x)^{-m/2}F\left[\begin{matrix}-k, k-m+n+1; 1-x/2\\ 1-m\end{matrix}\right] \quad (1\cdot2)$$

इस प्रसंग में निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी : परिमित अन्तर आपरेटर E(6, p. 273 जहाँ $h=1$]

$$E_a f(a)=f(a+1),\ E_a^n f(a)=E_a\left(E_a^{n-1} f(a)\right) \quad (1\cdot3)$$

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}P^{\mu,\nu}_{k-(\mu-\nu/2)}(z)\ H^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p,[t:t'],s,[q:q']}\left[\begin{matrix}x(1+z)^{\sigma}\\ \\ y(1+z)^{\sigma}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(\epsilon_p, e_p)\}\\ \{(\gamma_t, c_t)\}; (\gamma'_{t'}, c'_{t'})\}\\ \{(\delta_s, d_s)\}\\ \{(_q, b_q)\}; \{(\beta'_{q'}, b_{q'})\}\end{matrix}\right.\right]dz$$

$$=2^{\rho-\mu+\nu/3+1}H^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p+2,[t:t'],s+2,[q:q']}\left[\begin{matrix}x2^{\sigma}\\ \\ y2^{\sigma}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\rho\pm\frac{1}{2}\nu, \sigma), \{(\epsilon_p, e_p)\}\\ \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\}\\ \{(\delta_s, d_s)\}, (1+\rho-\frac{1}{2}\nu-k,\sigma), (2+\rho+k+\frac{1}{2}\nu-\mu,\sigma)\\ \{(\beta q, b_q)\}; \{\beta'_{q'}, b'_{q'})\}\end{matrix}\right.\right] \quad (1\cdot4)$$

यदि $R(\mu)\geqslant 1,\ R\left[\rho+\frac{1}{2}\nu+\sigma\left(\frac{\beta_t}{b_t}+\frac{\beta'_{t'}}{b'_{t'}}\right)\right]>-1(t=1, 2, \ldots, m_1;\ t'=1, 2, \ldots, m_2)$, $\delta>0, \delta'<0, \lambda'>0, |\arg x|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\lambda'\pi$.

उपर्युक्त समाकल को स्थापित करने के लिये (1·4) के बाईं ओर के सार्वीकृत H-फलन को इसके समतुल्य कंटूर समाकल द्वारा व्यक्त करते हैं जैसा कि (1·1) में दिया हुआ है, फिर

समाकलन के क्रम को बदलते हैं जो वैध है क्योंकि समाकल पूर्णतया अभिसारी है और अन्त में आन्तरिक समाकल को सूत्र [5, (36), p. 343] अर्थात्

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-m/2}(1-x)^{\sigma}P^{m,n}_{k-(m-n)/2}(x)\,dx=\frac{2^{\sigma-m+n/2+1}\Gamma(\sigma+\frac{1}{2}n+1)\Gamma(\sigma-\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(\sigma-\frac{1}{2}n-k+1)\Gamma(\sigma-m+\frac{1}{2}n+k+2)}, \quad \ldots \quad (1\cdot5)$$

यदि $R(m)<1, R(6+\frac{1}{2}n)>-1$ की सहायता से हल कर लेते हैं ।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित समाकल की स्थापना की जावेगी :

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{-2/1}(1+z)^{\rho}P^{\mu,\nu}_{k-(\mu-\nu)/2}(z)\,{}_{\mu}F_{i}\left\{{\alpha_u \atop \alpha'_v};c(1+z)^d\right\}$$

$$H^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p,[t:t'],s,[q:q']}\left[\begin{array}{c|c} x(1+z)^{\sigma} & \{(\epsilon_p,e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y(1+z)^{\sigma} & \{(\delta_s,d_s)\} \\ & \{\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right]dz$$

$$=2^{\rho-\mu+\nu/2+1}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{u}(a_j)_{\gamma}c^{\gamma}2^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{v}(\alpha'_j)_{\gamma}\gamma!}$$

$$H^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p-2,[t:t'],s+2,[q:q']}\left[\begin{array}{c|l} & (-\rho-\gamma d\pm\frac{1}{2}\nu,\sigma),\{(\epsilon_p,e_p)\} \\ x2^{\sigma} & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y2^{\sigma} & \{(\delta_s;d_s)\},(1+\rho+\gamma d-\frac{1}{2}\nu-k,\sigma),(2+\rho+\gamma d+k+\frac{1}{2}\nu-\mu,\sigma) \\ & \{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right] \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

समीकरण (1·4) के लिये निर्दिष्ट प्रतिबन्धों के ही अन्तर्गत समीकरण (2·1) वैध है । साथ ही $u\leqslant v(u=v+1)$ तथा $|c|<1$, $a_1^1,\ldots,\alpha^1v$ में से कोई भी शून्य या ऋण पूर्णांक नहीं हैं और d धनात्मक पूर्णांक हैं ।

उपपत्ति :

(1·4) को दोनों ओर

$$\frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(a_j+\delta)c^{\delta}}{\prod_{j=1}^{v}\Gamma(\alpha'_j+\delta)}$$

से गुणा करने तथा आपरेटर exp $(E_\rho{}^d E_\delta)$ को व्यवहृत करने तथा दोनों पक्षों को प्रसारित करने पर

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}\; P_{k-(\mu-\nu)/2}^{\mu,\nu}\;(z)\;\frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(d_j+\delta+\gamma)c^{\delta+\gamma}(1+z)^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{v}\Gamma(\alpha'_j+\delta+\gamma)\;\gamma!}$$

$$\times H_{p,[t:t'],s[q:q']}^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}\left[\begin{array}{c|c} x(1+z)^{\sigma} & \{(\epsilon_p,\, e_p)\} \\ & \{\gamma_t,\, c_t)\};\{(\gamma'_{t'},\, c'_{t'})\} \\ y(1+z)^{\sigma} & \{\delta_s, d_s)\} \\ & \{\beta_q,\, b_q)\};\{(\beta'_{q'},\, b'_{q'})\} \end{array}\right]dz$$

$$=2^{\rho-\mu+\nu/2+1}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(a_j+\delta+\gamma)c^{\delta+\gamma}2^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{v}\Gamma(\alpha'_j+\delta+\gamma)\gamma!}$$

$$\times H_{p+2,[t:t'],s+2,[q:q']}^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}\left[\begin{array}{c|l} x2^{\sigma} & (-\rho-\gamma d\pm\tfrac{1}{2}\nu,\, \sigma),\{(\epsilon_p,e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y2^{\sigma} & \{(\delta_s,d_s)\}(1+\rho+\gamma d-\tfrac{1}{2}\nu-k,\, \sigma),(2+\rho+\gamma d+k+\tfrac{1}{2}\nu-\mu,\sigma) \\ & \{(\beta_q,\, b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right] \tag{2·2}$$

अब बाईं ओर समाकलन के क्रम तथा संकलन को परिवर्तित करने तथा $a_j+\delta$ को a_j द्वारा और $a_j+\delta$ को α'_j द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें (2·1) मिलेगा।

विशिष्ट दशायें (1) :

यदि हम (2·1) में $e_j(j=1, 2, \ldots, p)=b_j(j=1, 2, \ldots, q)=b'_j(j=1, 2, \ldots, q')$ $=c_j(j=1, 2, \ldots, t)=c'_j(j=1, 2, \ldots, t')=d_j(j=1, 2, \ldots, s)=1$ रखें जहाँ σ धन पूर्णांक है तो दो चरों वाला H-फलन दो तर्कों में अग्रवाल के G-फलन का रूप धारण कर लेगा और हमें

$$\int_{-1}^{1}(1+z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}P_{k-(\mu-\nu)/2}^{\mu,\nu}\;(z)_uF_v\left\{\begin{matrix}\alpha_u\\ \alpha'_v\end{matrix};c(1+z)^d\right\}$$

$$G_{p,[t:t'],s,[q:q']}^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}\left[\begin{array}{c|c} & (\epsilon_p) \\ x(1+z)^{\sigma} & (\gamma_t);\,(\gamma'_{t'}) \\ y(1+z)^{\sigma} & (\delta_s) \\ & (\beta_q);\,(\beta'_{q'}) \end{array}\right]dz$$

$$=2^{\mu-\mu+\nu/2+1}\,\sigma^{\mu-1}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{u}(\alpha_j)_{\gamma}c^{\gamma}2^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{e}(\alpha'_j)_{\gamma}\gamma!}$$

$$G^{n+2\sigma,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}_{p+2\sigma,\,[t:t],\,s,\,2\sigma,\,[q:q']}\left[\begin{matrix}x2^{\sigma}\\ \\ y2^{\sigma}\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma,\,-\rho-\gamma d\pm\tfrac{1}{2}\nu),\,(\epsilon_p)\\ (\gamma_t);\,(\gamma'_{t'})\\ (\delta_s),\,\triangle(\sigma,\,1+\rho+\gamma d-\tfrac{1}{2}\nu-k)\,\triangle(\sigma,\,2+\rho+\gamma d+\tfrac{1}{2}\nu-\mu+k)\\ (\beta_q);\,\beta'_{q'})\end{matrix}\right.\right]\tag{2·3}$$

प्राप्त होगा यदि $R(m)<1$, $R[\rho+\frac{1}{2}\nu+\sigma(\beta t+\beta'_{t'})]\geqslant-1(t=1, 2, \ldots, m_1;\ t'=1, 2, \ldots, m_2)$

$2(n+\nu_1+m_1)>p+s+t+q$, $|\arg x|<\left(n+\nu_1+m_1-\frac{p}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}-\frac{q}{2}\right)\pi$,

$2(n+\nu_2+m_2)>p+s+t'+q'$, $|\arg y|<\left(n+\nu_2+m_2-\frac{p}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t'}{2}-\frac{q'}{2}\right)\pi$,

$u\leqslant v(u=\nu+1$ तथा $|c|<1)$, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_v$ में से एक की शून्य या ऋण पूर्णांक नहीं है तथा d धन पूर्णांक है।

दोनो तर्कों में G-फलन में माइजर का G-फलन तथा दो G-फलनों का गुणनफल सन्निविष्ट रहता है जिससे सामान्यतः व्यवहृत कई विशिष्ट फलनों की प्रप्ति होती है [2, pp. 216-19]।

(2·1) में $p=s=c=0$ रखने पर दो चरों वाले H-फलन से फाक्स के दो H-फलनों का गुणनफल प्राप्त होता है फलतः हमें

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}P^{\mu,\nu}_{k-(\mu-\nu)1/2}(z)\,H^{m_1,\nu_1}_{t,q}\left[x(1+z)^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(1-\gamma_t,\,c_t)\}\\ \{(\beta_q,\,b_q)\}\end{matrix}\right.\right]H^{m_2,\nu_2}_{t',q'}\left[y(1+z)^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(1-\gamma'_{t'},\,c'_{t'})\}\\ \{(\beta'_{q'},\,b'_{q'})\}\end{matrix}\right.\right]dz$$

$$=2^{\rho-\mu+\nu/2+1}\;H^{3,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}_{2,\,[t:t'],\,2,\,[q:q']}\left[\begin{matrix}x2^{\sigma}\\ \\ y2^{\sigma}\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\rho\pm\tfrac{1}{2}\nu,\,\sigma)\\ \{(\gamma_t,\,c_t)\};\,\{(\gamma'_{t'},\,c'_{t'})\}\\ (1+\rho-\tfrac{1}{2}\nu-k,\,\sigma),\,(2+\rho+k+\tfrac{1}{2}\nu-\mu,\,\sigma\\ \{(\beta_q,\,b_q)\};\,\{\beta'_{q'}\,b_{q'})\}\end{matrix}\right.\right]\tag{2·4}$$

प्राप्त होगा जो (2·1) निर्दिष्ट प्रतिबन्धों के लिये जिसमें $p=s=c=0$ है वैध होगा।

3. प्रस्तार सूत्र : हम निम्नांकित प्रस्तार सूत्र की स्थापना करेंगे

$$(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}{}_uF_v\left\{\begin{matrix}a_u\\a'_v\end{matrix};c(1+z)^d\right\}$$

$$H^{p,\nu_1,\nu_2,m_1,n_2}_{[t:t'],s,[q:q']}\left[\begin{matrix}\\x(1+z)^\sigma\\y(1+z)^\sigma\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}\{\epsilon_p,e_p)\}\\\{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\}\\\{(\delta_s,d_s)\}\\\{(\beta_q,b_q)\}\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{\gamma,g=0}^{\infty}\frac{2^{\rho-\nu/2}(2g-\mu+\nu+1)\Gamma(g-\mu+1)\Gamma(g-\mu+\nu+1)}{g!\Gamma(g+\nu+1)}\frac{\prod_{j=1}^{u}(a_j)_\gamma c^\gamma 2^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{v}(a'_j)_\gamma\gamma!}P^{\mu,\nu}_{g-(\mu-\nu)/2}(z)$$

$$\times H^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p+2,[t:t],s+2,[q:q']}\left[\begin{matrix}\\x2^\sigma\\y2^\sigma\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\rho-\gamma d\pm\tfrac{1}{2}\nu,\sigma),\{(\epsilon_p,e_p)\}\\\{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\}\\\{(\delta_s,d_s)\},(1+\rho+\gamma d-\tfrac{1}{2}\nu-g,\sigma),(2+\rho+\gamma d+g+\tfrac{1}{2}\nu-\mu,\sigma)\\\{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\}\end{matrix}\right.\right] \quad \ldots \quad (3\cdot1)$$

(3·1) के विहित होने के लिये वे ही प्रतिबन्ध हैं जो (2·1) में दिए हैं। साथ ही $R(\mu)\leqslant0$ तथा $R(\rho)>0$ भी।

उपपत्ति :

माना कि

$$f(z)=(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}{}_\mu F_v\left\{\begin{matrix}a_u\\a'_v\end{matrix};c(1+z)^d\right\}$$

$$H^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p,[t:t'],s,[q:q']}\left[\begin{matrix}\\x(1+z)^\sigma\\y(1+z)^\sigma\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(\epsilon_p,e_p)\}\\\{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\}\\\{(\delta_s,d_s)\}\\\{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{g=0}^{\infty}A_g\;P^{\mu,\nu}_{g-(\mu-\nu)/2}(z),\;-1<z<1. \quad \ldots \quad (3\cdot2)$$

समीकरण (3·2) विहित है क्योंकि $f(z)$ सतत हैं तथा विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में परिबद्ध विचरण वाला है जब $R(\mu)\leqslant 0$ तथा $R(\rho)\geqslant 0$.

(3·2) में दोनों ओर $P^{\mu,\nu}_{k-(\mu-\nu)/2}(z)$, से गुणा करने पर तथा $(-1, 1)$ अन्तराल भर z के प्रति समाकलित करने पर, (2·1) को तथा सार्वीकृत सहचारी लेगेंड्र बहुपदी[5] के लाम्बिक गुण का उपयोग करने पर

$$A_k=2^{\rho-n/2}\frac{(2K-\mu+\nu+1)\Gamma(K-\mu+1)\Gamma(K-\mu+\nu+1)}{K!\Gamma(K+\nu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{u}(a_j)_\gamma C_2{}^{\gamma}2^{\gamma d}}{\prod_{j=1}^{v}(a'_j)_\gamma \gamma!}$$

$$\times H^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p+2,[t:t'],s+2,[q:q']}\left[\begin{array}{c|c} & (-\rho-\gamma d\pm\tfrac{1}{2}\nu,\sigma),\{(\epsilon_p,e_p)\} \\ x2^\sigma & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y2^\sigma & \{(\delta_s,d_s)\},(1+\rho+\gamma d-\tfrac{1}{2}\nu-K,\sigma),(2+\rho+\gamma d+K+\tfrac{1}{2}\nu-\mu,\sigma) \\ & \{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right] \quad \ldots (3\cdot3)$$

प्राप्त होगा। अतः (3·2) तथा (3·3) से प्रस्तार (3·1) प्राप्त होगा।

अब (3·1) में $c=0$ रखने पर

$$(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}H^{n,\nu_1,\nu_2,n_1,m_2}_{p,[t:t'],s,[q:q']}\left[\begin{array}{c|c} & \{(\epsilon_p,e_p)\} \\ x(1+z)^\sigma & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y(1+z)^\sigma & \{(\delta_s,d_s)\} \\ & \{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

$$=2^{\rho-\nu/2}\sum_{g=0}^{\infty}\frac{(2g-\mu+\nu+1)\Gamma(g-\mu+1)\Gamma(g-\mu+\nu+1)}{g!\,\Gamma(g+\nu+1)}P^{\mu,\nu}_{g-(\mu-\nu)/2}(z)$$

$$\times H^{n+2,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p+2,[t:t'],s+2,[q:q']}\left[\begin{array}{c|c} & (-\rho\pm\tfrac{1}{2}\nu,\sigma)(\epsilon_p,e_p) \\ x2^\sigma & \{(\gamma_t,c_t)\};\{(\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y2^\sigma & \{(\delta_s,d_s)\},(1+\rho-\tfrac{1}{2}\nu-g,\sigma),(2+\rho+g+\tfrac{1}{2}\nu-\mu,\sigma) \\ & \{(\beta_q,b_q)\};\{(\beta'_{q'},b'_{q'})\} \end{array}\right] \quad (3\cdot4)$$

पुनः यदि (3·4) में $p=n$, $q'=m_2=1$, $\beta'_1=0$, $b'_1=1$, $\nu_2=t'=0$ रखें और $y\to 0$ कर लें तथा $n+\nu_1$ को m_2 द्वारा, $t+n$ को t द्वारा, $q+s$ को q द्वारा प्रतिस्थापित करने के साथ ही प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन कर लें तो अनन्दानी[1] द्वारा प्राप्त फल मिलेगा।

पुनः यदि (3·1) में $\mu=\nu, p=n, q'=m_2=1, \beta'_1=0, b'_1=1, \nu_2=t'=0$ रखें और $y\to 0$, कर लें तथा $n+\nu_1$ को m_2 द्वारा, $t+n$ को t द्वारा, $q+s$ को q द्वारा प्रतिस्थापित करने के साथ ही प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन कर लें तो सिंह तथा वर्मा [8, (4·1)] के समान फल की प्राप्ति होगी।

अन्त में सम्बन्ध [7] के प्रकाश में

$$H^{n,\nu_1,\nu_2,1,1}_{n,[\nu_1:\nu_2],s,[q+1:q'+1]}\left[\begin{matrix} \\ x \\ y \\ \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(1-\epsilon_n,1)\} \\ \{(\gamma_{\nu_1},1)\};\{\gamma'_{\nu_2},1)\} \\ \{(\delta_s,1)\} \\ \{(1-\beta_q,1)\},(0,1);\{(1-\beta'_{q'},1)\},(0,1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\epsilon_j)\prod\limits_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j)\prod\limits_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma_j)}{\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j)\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(\beta_j)\prod\limits_{j=1}^{q_1}\Gamma(\beta'_j)}\; F\left[\begin{matrix} n \\ (\nu_1,\nu_2) \\ s \\ (q,q')\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\epsilon_n) \\ (\gamma_{\nu_1});(\gamma'_{\nu_2}) \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);(\beta'_{q'})\end{matrix}\right|\begin{matrix}-x \\ \\ \\ -y\end{matrix}\right] \tag{3·5}$$

हमें कैम्पे-द-फेरी फलन का प्रसार सूत्र प्राप्त होता है अर्थात्

$$(1-z)^{-\mu/2}(1+z)^{\rho}\,{}_uF_v\left\{\begin{matrix}\alpha_u \\ \alpha'_v\end{matrix};c(1+z)^d\right\}F\left[\begin{matrix} n \\ (\nu_1,\nu_2) \\ s \\ (q,q')\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\epsilon_n) \\ (\gamma_{\nu_1});(\gamma'_{\nu_2}) \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);(\beta'_{q'})\end{matrix}\right|\begin{matrix}x(1+z)^{\sigma} \\ \\ \\ y(1+z)^{\sigma}\end{matrix}\right]$$

$$=2^{\rho-\nu/2}\sigma^{\mu-1}\sum_{\gamma,g=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{u}(\alpha_j)_{\gamma}c^{\gamma}z^{\gamma d}}{\prod\limits_{j=1}^{v}(\alpha'_j)_{\gamma}\gamma!}\,Q(g,\gamma)\,P^{\mu,\nu}_{g-(\mu-\nu)/2}(z)$$

$$F\left[\begin{matrix} n+2\sigma \\ (\nu_1,\nu_2) \\ s+2\sigma \\ (q,q')\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma,1+\rho+\gamma d\pm\frac{1}{2}\nu),(\epsilon_n) \\ (\gamma_{\nu_1})\;(\gamma'_{\nu_2}) \\ (\delta_s),\triangle(\sigma,1+\rho+\gamma d-\frac{1}{2}\nu-g),\triangle(\sigma,2+\rho+\gamma d+\frac{1}{2}\nu-\mu+g) \\ (\beta_q);(\beta'_{q'})\end{matrix}\right|\begin{matrix}x2^{\sigma} \\ \\ \\ y2^{\sigma}\end{matrix}\right], \tag{3·6}$$

जहाँ σ धन पूर्णांक है तथा

$$Q(g,\gamma) = \frac{(2g-\mu+\nu+1)\Gamma(g-\mu+1)\Gamma(g-\mu+\nu+1)\prod_{j=1}^{\sigma}\Gamma(\rho+\gamma d+\frac{1}{2}\nu+j/\sigma)\prod_{j=1}^{\sigma}\Gamma(\rho+\gamma d-\frac{1}{2}\nu+j/\sigma)}{g!\,\Gamma(g+\nu+1)\prod_{j=1}^{\sigma}\Gamma(\rho+\gamma d-\frac{1}{2}\nu-g+j/\sigma)\prod_{j=1}^{\sigma}\Gamma(1+\rho+\gamma d+\frac{1}{2}\nu-\mu+g+j/\sigma)} \quad (3\cdot6)$$

यहाँ निष्कर्ष रूप में यह इंगित करना रोचक होगा कि कैम्पे-द-फेरी के फलन से ऐपेल फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन, दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों का गुणनफल तथा अन्य कई सरल तथा सामान्य रूप से व्यवहृत फलनों की प्राप्ति होती है। फलतः फल (3·6) से ऐसे कई नूतन परिणामों की प्राप्ति हो सकती है जिसमें सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन तथा ऐपेल फलन सन्निहित हों।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी०, **क्यूंगपूक मैथ० जर्न०**, 1970, **10**, 53-57.
2. बेटमैन प्रोजेक्ट, Higher Transcendental Functions 1953, **भाग I मैकग्राहिल**
3. कुइपर्स, एल० तथा म्यूलेनबेल्ड, बी०, Proc. Kon. Ned. Ak. v. W. Amsterdam, Series, A 1957, **60**, (4),
4. माथुर, ए० बी०, **पी०-एच-डी० थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन**, 1969, 215-19.
5. म्यूलेनबेल्ड, बी० तथा रोबिन, एल०, Kon. Ned. Ak. v. W. Amsterdam. Reprinted from proceedings Series A, **64**(3), Indag. Math. **23**(3), 1961, 333-347.
6, पाइप्स, एल०ए०, Applied Mathematics for Engineers and Physicists. **मैकग्राहिल द्वितीय संस्करण**
7. शर्मा, बी० एल०, On the generalised function of two variables. Seminario Matematico De Barcelona (प्रकाशनाधीन)
8. सिंह, एफ० तथा वर्मा, आर०सी०, **जर्न० इण्डियन मैथ०** (प्रेस में)

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 17	अप्रैल 1974	संख्या 2

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17; No 2, April 1974, Pages 81-82

सोडियम-नेप्थेलिनाइड से कुछ फ्लैवेनालों के अवकरण का अध्ययन

एस० के० गुप्ता तथा एम० एम० बोकाड़िया
रसायन विभाग, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 9, 1974]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में सोडियम-नेप्थेलिनाइड अभिकर्मक के द्वारा कुछ फ्लैवेनालों के अवकरण का उल्लेख है।

Abstract

Studies on reduction of flavonols with sodium-napthalenide. *By* S. K. Gupta and M. M. Bokadia, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

The present study reveals reduction of flavonols with sodium-napthalenide radical to dihydroflavonols.

सोडियम नेप्थेलीन मूलक एक महत्वपूर्ण अभिकर्मक है। इससे कोलेस्टराइल एवं कोलेस्टनाइल क्लोराइड से हाइड्रोकार्बन प्राप्त होने का उल्लेख मिलता है। अभी तक इस अभिकर्मक का उपयोग फ्लैवोनाइड रसायन में नहीं हुआ है। अतः प्रस्तुत अध्ययन इसी उद्देश्य से किया गया। इस शोध योजना में उपर्युक्त फ्लैवेनालों को सोडियम नेप्थेलिनाइड के साथ अभिकृत किया गया।

प्रयोगात्मक

750 मिलिग्राम सोडियम को नाइट्रोजन के वायुमंडल में रखे 100 मि०लि० शुष्क टेट्राहाइड्रोफ्यूरेन एवं 50 ग्राम नेप्थेलीन में मिलाया एवं साधारण ताप पर 6 घन्टे तक हिलाया गया। पूर्ण क्रिया के लिये इसे 24 घन्टे रखा गया जिससे हरे रंग का विलयन प्राप्त हुआ। इसे फ्लैवेनाल के अवकरण के लिये इसी अवस्था में प्रयुक्त किया गया।

500 मि०लि० शुष्क टेट्राहाइड्रोफ्यूरेन में लिये गये 2 ग्राम फ्लैवेनाल में सोडियम नेप्थेलिनाइड अभिकर्मक को हरा रंग प्राप्त होने तक हिलाया गया। अभिकृत विलियन को बीच-बीच में हिलाते हुये

24 घंटे तक रखने के बाद हरा रंग विरंजित करने के लिये इसमें तृतीयक ऐल्कोहल की कुछ बूंदें मिलायी गईं एवं एक नार्मल डठं सल्फ्यूरिक अम्ल बूंद-बूंद करके विलयन के अम्लीय होने तक मिलाया गया। इसे ईथर से तीन बार निष्कर्षित करके ईथर निष्कर्ष को सोडियम कार्बोनेट एवं आसुत जल से धोकर, निर्जल सोडियम सल्फेट पर सुखाया गया। विलायक का वाष्पीकरण करने के बाद शेष पदार्थ का सिलिका जेल के स्तम्भ द्वारा पृथक्करण किया गया। नेप्थेलीन को पूर्ण रूप से पृथक करने के लिये नार्मल हेक्सेन विलायक लिया गया। नेप्थेलीन के पृथक हो जाने के बाद बेंजीन द्वारा प्रभाजन किया गया। बेंजीन प्रभाजों से विलायक आसवित करने एवं ऐल्कोहल में से क्रिस्टलीकरण करने से 0.5 ग्राम रंगहीन पदार्थ प्राप्त हुआ, जिसका गलनांक 180° निकला। डाइहाइड्रोफ्लैवेनाल के प्रामाणिक नमूने के साथ लिये गये संयुक्त गलनांक से पदार्थ का डाइहाइड्रोफ्लैवेनाल होना निश्चित हुआ।

इसी प्रक्रम द्वारा दूसरे प्रतिस्थापित फ्लैवेनालों से अभिक्रिया की गई, जिसके परिणाम सारिणी 1 में दिखाये गये हैं।

सारिणी 1

	फ्लैवेनाल का नाम	गलनांक	प्राप्त हाइड्रोफ्लैवेनाल का गलनांक	हाइड्रोफ्लैवेनाल का वास्तविक गलनांक
1.	4-मेथाक्सी	232°	168°	168°
2.	6-मेथिल	196-97°	160°	160°
3.	6-मेथिल-4-मेथाक्सी	192-93°	146-47°	147-49°

निर्देश

1. स्कॉट, एन० डी० वॉकर, जे० एफ० हन्सले, वी० **जर्न० एल०, केमि० सोसा०** 1936, **58**, 2442
2. पालू, डी० इ०, लिपकिन, डी० तथा विस्मान, एस० आई०, **अमे० केमि० सोसा०** 1956, **78**, 116
3. लिसी तथा थामस एम०, **जर्न० आमे० केमि०** 1962, **5**, 27
4. नार्मेन्ट तथा अन्जेलो, **बुले०, आफ० सोसायटी** 1960, 3[illegible]4
5. हार्गर एल० तथा गस्टेन, **वार्षिक रिपोर्ट** 1962, **99**, 652
6. हार्नर एवं अनगीव, Chemistry International **प्रथम संस्करण** 1962, 452
7. क्लासन, डब्ल्यू० डी०, वरीडे, पी० तथा बैंक, एस०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1966, **88**, 158
8. ग्रास्ट, जे० पी०, अय्यर्स, पी० डबल्यू, तथा लैम्प, आर० सी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1966 **88**, 4260
9. क्रिस्टाल, एस० जे० तथा बारबर, आर० वी०, **जर्न० केमि० सोसा०** 1966, **88**, 4262

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 83-87

विभिन्न क्रम वाले बेसेल फलनों के समाकल

वी० सी० नायर
गणित विभाग, रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, कालीकट, केरल

[प्राप्त—जुलाई 28, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य बेसेल फलनों वाले कतिपय समाकलों का मान निकालना है जब क्रम के प्रति समाकलन किया जावे। ऐसे समाकलों की आवश्यकता तरंग की परिसीमा मान समस्याओं तथा फन्नी या शंक्वाकार परिसीमाओं वाले विसरण समीकरण के अध्ययनों के समय पड़ती है।

Abstract

Integrals involving bessel functions of variable order. *By* V. C. Nair, Department of Mathematics, Regional Engineering College, Calicut, Kerala.

The object of this paper is to evaluate a few integrals involving Bessel functions, the integration being with respect to the order. Such integrals arise in connection with studies of boundary value problems of the wave and diffusion equation involving wedge or conically shaped boundaries.

1. परिभाषायें तथा प्रयुक्त परिणाम

${}_1(a_j, e_j)_n$ द्वारा प्राचलों के n युग्मों का अंकन किया गया है :

$$(a_1, e_1), (a_2, e_2), \ldots, (a_n, e_n).$$

H-फलन को [3, p. 408] परिभाषित करते हैं और

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix} {}_1(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_p \end{matrix} \right.\right] = (2\pi i)^{-1} \int_L F(s) x^s \, ds, \tag{1·1}$$

के रूप में प्रदर्शित करते हैं जहाँ

$$F(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}.$$

यहाँ पर x शून्य के तुल्य नहीं है, रिक्त गुणनफल इकाई के तुल्य माना गया है, m, n, p, q ऐसे पूर्णांक हैं कि $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, समस्त e तथा f धन संख्यायें हैं और समस्त a तथा b ऐसी संकुल संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_j-f_js)$, $j=1, 2, \ldots, m$ के कोई भी पोल $\Gamma(1-a_j+e_js)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के किसी पोल से संगमित नहीं होते और कंटूर $\sigma-i\infty$ से $a+i\infty$ तक इस तरह विस्तृत रहता है कि $\Gamma(b_j-f_js)$, $j=1, 2, \cdots, m$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_js)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के पोल बाईं ओर स्थित रहें।

ब्राक्समा [1, pp. 245, 246] ने सिद्ध किया है कि (1·1) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी होता है यदि $\phi>0$ तथा $|\arg x|<\phi\pi/2$, जहाँ

$$\phi=\sum_{j=1}^{n}(e_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(e_j)+\sum_{j=1}^{m}(f_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(f_j). \tag{1·2}$$

समूचे शोध पत्र में ϕ को (2·2) द्वारा व्यक्त किया जावेगा तथा कन्टूर L और फलन $F(s)$ वैसे ही रहेंगे जैसा कि (1·1) में उल्लेख हुआ है।

जब समस्त e तथा f इकाई हों तो (1·1) द्वारा परिभाषित H-फलन माइजर के G फलन

$$G_{p,q}^{m,n}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_p\\ b_1, b_2, \ldots, b_q\end{matrix}\right].$$

में अपघटित हो जाता है।

G-फलन में प्राचलों के विशिष्टीकरण की विधि द्वारा अन्य कई ज्ञात विशिष्ट फलन [2, pp. 434-439] प्राप्त किये जाते हैं। इनमें से कुछ निम्नांकित प्रकार हैं जिनका उपयोग इस शोध पत्र में होगा :

$$G_{1,3}^{1,1}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}1/2\\ 0,\ a,\ -a\end{matrix}\right]=\sqrt{\pi}J_a(\sqrt{x})J_{-a}(\sqrt{x}). \tag{1·3}$$

$$G_{p,q}^{1,p}\left[x\left|\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_p\\ b_1, b_2, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right]=\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(1+b_1-a_j)}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma(1+b_1-b_j)}x^{b_1}$$

$$ {}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+b_1-a_1, \ldots, 1+b_1-a_p;\\ 1+b_1-b_2, \ldots, 1+b_1-b_q; -x\end{matrix}\right], p\leqslant q. \quad (1\cdot4)$$

$$G_{0,2}^{1,0}\left[x\left|\begin{matrix} a, b\end{matrix}\right.\right]=x^{(a+b)/2}\,\mathcal{J}_{a-b}\,(2\sqrt{x}). \quad (1\cdot5)$$

एर्डेल्यी [2, p. 300]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b+c+d-3)}{\Gamma(a+b-1)\Gamma(b+c-1)\Gamma(c+d-1)\Gamma(d+a-1)}\cdot Re\ (a+b+c+d)>3. \quad (1\cdot6)$$

2. कतिपय सामान्य परिणाम

इस अनुभाग में H-फलन वाले कुछ समाकलों का मान ज्ञात किया जावेगा जिसमें किसी एक प्राचल के प्रति समाकलन किया जाता है । इनका उपयोग अगले अनुभाग में बेसेल फलन वाले वांछित फलों की प्राप्ति में किया जवेगा ।

(1·6) में a, b, c, d के स्थान पर सर्वत्र $a+a's, b+b's, c+c's, d+d's$ रखकर दोनों ओर $F(s)\ y^s/(2\pi i)$ से गुणा करें तथा L कंटूर की दिशा में समाकलित करें । बाईं ओर समाकलन के क्रम में परिवर्तन लाने पर हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ (2\pi i)^{-1}\int\ \frac{F(s)y^s\ ds}{\Gamma(a+a's+x)\Gamma(b+b's-x)\Gamma(c+c's+x)\Gamma(d+d's-x)}$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_L\frac{\Gamma[a+b+c+d+(a'+b'+c'+d')s-3]F(s)y^s}{\Gamma[a+b+(a'+b')s-1]\Gamma[b+c+(b'+c')s-1]\Gamma[c+d+(c'+d')s-1]\ \Gamma[d+a+(d'+a')s-1]}\ ds. \quad (2\cdot1)$$

यदि दाईं ओर का समाकल अभिसारी हो तो (1·1) के उपयोग करने पर इसे H फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । यही बात बाईं ओर के आन्तरिक समाकल के सम्बन्ध में भी सत्य है । यदि सम्बद्ध समाकल पूर्णतया अभिसारी हों तो बाईं ओर किया गया समाकलों के क्रम में परिवर्तन वैध है । प्रतिबन्धों का एक सेट, जिसके अन्तर्गत यह सत्य होगा, इस प्रकार है :

$$Re\,[a+b+c+d+(a'+b'+c'+d')b_j/f_j]>3 \text{ जहाँ } j=1,2,\ldots m,$$

$$a'\geqslant 0,\ b'\geqslant 0,\ c'\geqslant 0,\ d'\geqslant 0,\ \phi>a'+b'+c'+d'$$

तथा $|\arg y|\leqslant \pi(\phi-a'-b'-c'-d')/2.$

उदाहरणार्थ, यदि $a'=b'=0,\ c'>0,\ d'>0$, तो (2·1) से

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}\,H_{p,q+2}^{m,n}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (1-c-x,c'),\ (1-d+x,d')\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a+b-1)}\,H_{p+1,q+3}^{m,n+1}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}(4-a-b-c-d,\ c'+d'),\ {}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (2-b-c,c'),\ (2-c-d,c'+d'),\ (2-d-a,d')\end{matrix}\right], \tag{2·2}$$

प्राप्त होता है यदि $Re\,[a+b+c+d+(c'+d')b_j/f_j]>3$ जहाँ $j=1,2,\ldots,m$,

$\phi>c'+d'$ तथा $|\arg y|<\pi(\phi-c'-d')/2.$

जब $a'=b'=c'=0$ तथा $d'>0$ तो (2·1) से

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)}\,H_{p,q+1}^{m,n}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (1-d+x,d')\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a+b-1)\Gamma(b+c-1)}\,H_{p+1,q+2}^{m,n+1}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}(4-a-b-c-d,\ d'),\ {}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (2-c-d,d'),\ (2-d-a,d')\end{matrix}\right], \tag{2·3}$$

प्राप्त होता है यदि $Re\,(a+b+c+d+d')b_j/f_j)>3$ जहाँ $j=1,2,\ldots,m,\ \phi>d'$ तथा

$|\arg y|<\pi(\phi-d')/2.$

3. विशिष्ट दशायें

(2·2) में $m=n=p=q=1,\ e_1=f_1=c'=d'=1,\ c=d=1,\ a_1=1/2,\ b_1=0$ रखने, y को y^2 द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (2·3) और (2·4) का उपयोग करने पर निम्नांकित फल की प्राप्त होती है :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}\,J_x(y)\,J_{-x}(y)\,dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,{}_2F_3\,[(a+b)/2,\ (a+b-1)/2;\ a,\ b,\ 1;\ -y^2],\ Re\,(a+b-1)>0. \tag{3·1}$$

(4·1) में माना कि $a=k+1,\ b=1-k$ जिससे $a+b=2$ तो हमें

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_x(y) J_{-x}(y)\, dx}{\Gamma(1+k+x)\Gamma(1-k-x)} = J_k(y) J_{-k}(y) \text{ प्राप्त होगा ।} \tag{3·2}$$

जब $a=b=3/2$ तो (4·1) से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_x(y) J_{-x}(y)\, dx}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)} = 2 \sin (2y)/(\pi y) \text{ प्राप्त होता है ।} \tag{4·3}$$

निम्नांकित प्राप्त करने के लिये (2·3) में $n=p=0$, $m=q=1$, $b_1=f_1=d'=1$ रखते हैं यदि

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{x/2} J_{d-x}(2\sqrt{y})\, dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)}$$
$$= \frac{y^{d/2}\Gamma(a+b+c+d-2)\ {}_1F_2\,[a+b+c+d-2;\ a+d,\ c+d;\ -y]}{\Gamma(a+b-1)\Gamma(b+c-1)\Gamma(c+d)\Gamma(d+a)}, \tag{3·4}$$

यदि $Re\ (a+b+c+d)>2$.

जब $b+c=2$, तो (4·1) निम्नांकित रूप धारण करता है

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^x J_{d-x}(2y)}{\Gamma(a+x)\Gamma(1+k-x)\Gamma(1-k+x)}\, dx = \frac{y^k J_{d-k}(2y)}{\Gamma(a+k)},\ Re\ (a+d)>0. \tag{3·5}$$

इसी प्रकार से [2, p. 297(2) तथा (3), p. 298(12), p. 300(19) तथा (22)] का व्यवहार करने पर अनेक परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक कालीकट रीजनल इंजीनियरिंग कालेज के प्रिंसिपल का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी के लिये प्रोत्साहित किया ।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compos. Math., 1963, **15**, 239-341
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, 1954, भाग **II**, मैकग्राहिल, न्यूयार्क
3. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 89-95

बेसेल F तथा H-फलनों के गुणनफल वाले द्विगुण समाकल

एम० एस० समर
गणित विभाग, रीजनल कालेज आफ एजुकेशन, अजमेर

[प्राप्त—अगस्त 6, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में दो समाकलों

$$I_1=\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x} {}_1F_1 (a; b; x)\ I_v(\tfrac{1}{2}y)K_\rho(\tfrac{1}{2}y) \times H_{p,q}^{m,l}\left[Zx^\sigma y^\lambda \Big/ \begin{matrix}, (a_j, e_j)p \\ , (b_j, f_j)q\end{matrix}\right] dx\, dy$$

$$I_2=\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x} {}_1F_1 (a; b; x)\ J_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}}y)K_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot y) \times H_{p,q}^{m,l}\left[zx^\sigma y^\lambda \Big/ \begin{matrix}, (a_j, e_j)p \\ , (b_j, f_j)q\end{matrix}\right] dx\, dy$$

का मान ज्ञात किया गया है ।

Abstract

Double integrals involving the product of Bessel F and H-functions. *By* M. S. Samar, Department of Mathematics, Regional College of Education, Ajmer.

In this paper, the integrals

$$I_1=\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x} {}_1F_1 (a; b; x)\ I_v(\tfrac{1}{2}y)K_\rho(\tfrac{1}{2}y) \times H_{p,q}^{m,l}\left[zx^\sigma y^\lambda \Big/ \begin{matrix}, (a_j, e_j)^p \\ , (b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] dx\, dy.$$

$$I_2=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-x}\,{}_1F_1(a;b;x)\,J_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}}y)K_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}}y)$$

$$\times H_{p,q}^{m,l}\left[zx^\sigma y^\lambda\Big/\begin{matrix},(a_j,e_j)^p\\,(b_j,f_j)\end{matrix}\right]dx\,dy,$$

have been evaluated.

1. भूमिका

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य बेसेल, हाइपरज्यामितीय तथा H-फलनों के गुणनफल वाले दो द्विगुण समाकलों की उपलब्धि करना है। इनकी सहायता से विशिष्ट दशाओं के रूप में अन्य कई फल प्राप्त किये जा सकते हैं।

फाक्स [4, p. 408] के H-फलन की परिभाषा

$$H_{p,q}^{m,l}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_ju)\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1-a_j+e_ju)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_ju)\prod_{j=l+1}^{p}\Gamma(a_j-e_ju)}x^u\,du \quad (1\cdot1)$$

के रूप में की जाती है जहाँ रिक्त गुणफल 1, है $0\leqslant m\leqslant b$, $0\leqslant l\leqslant q$, सभी e तथा f घन हैं, L बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है जिससे $\Gamma(b_j-f_ju)\,j=1$ से m के समस्त पोल कंटूर के दाईं ओर स्थित हों तथा $\Gamma(1-a_j+e_ju), j=1, 2, \ldots, l$ के बाईं ओर। ब्राक्समा[1] ने सिद्ध किया है कि (1·1) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी होता है यदि $\theta>0$ तथा $|\arg x|<\theta\frac{\pi}{2}$

जहाँ
$$\theta=\sum_{j=1}^{l}e_j-\sum_{j=l+1}^{p}e_j+\sum_{j=1}^{m}f_j-\sum_{j=m+1}^{q}f_j \quad (1\cdot2)$$

इस समूचे शोध पत्र में (1·1) को

$$H_{p,q}^{m,l}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\{}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]$$

द्वारा अंकित किया जावेगा। जब (1·1) के सभी e तथा सभी f इकाई हों तो यह माइजर के G-फलन

$$G_{p,q}^{m,l}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right]$$

में परिणत हो जाता है जिसे

$$G_{p,q}^{m,l}\left[x \Big/ \begin{matrix} {}_1(a_j)_p \\ {}_1(b_j)_q \end{matrix}\right]$$ के रूप में लिखा जा सकता है।

निम्नांकित फल गुप्ता [5, p. 481, 484] द्वारा प्राप्त किये गये हैं। जब $n=0,\ s+\gamma=a,\ a+\beta=\beta$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x}\ {}_1F_1(a;\ b;\ x) I_v(\tfrac{1}{2}y)\ K_\rho(\tfrac{1}{2}y)\ dx\ dy \tag{1·3}$$

$$=\frac{2^{2\beta-2}\Gamma(b)\Gamma(a)\Gamma(b-a-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma\frac{1}{2}(v+\beta\pm\rho)}{\Gamma(b-a)\Gamma(b-\alpha)\Gamma\{\frac{1}{2}(v-\beta+\rho)+1\}\Gamma\{\frac{1}{2}(v-\beta-\rho)+1\}}$$

यदि $Re\ (-v\pm\rho)<Re\ (\beta)<1,\ Re\ (b-a)>Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (b)>0.$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x}\ {}_1F_1\ (a;\ b;\ J_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}y}) K_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}y})\ dx\ dy \tag{1·4}$$

$$=\frac{2^{\beta-2}\Gamma(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(b-a-\alpha)\Gamma(\rho+\frac{1}{2}\beta)\Gamma(\frac{1}{2}\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(b-a)\Gamma(b-\alpha)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\beta}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\beta}{4}+1\right)}$$

यदि $Re\ (b-a)>Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (b)>0,\ Re\ (\beta+\rho)>|\ Re\ \rho\ |.$

सिंह [7, p. 223], द्वारा प्राप्त फल, जब $\mu=0$ (1·5)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)}\ x^{\alpha-1}\ y^{-\beta-1}\ {}_pF_q\left[\begin{matrix} {}_1(a_j)_p \\ {}_1(b_j)_q \end{matrix};\ t\,x^s y^k\right] dx\ dy$$

$$=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\ {}_{p+k+s}F_q\left[\begin{matrix} {}_1(a_j)_p,\ \triangle(s,\ \alpha),\ \triangle(k,\beta) \\ {}_1(b_j)_q \end{matrix};\ ts^sk^k\right],$$

यदि $Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (\beta)>0$ तथा k और s अनृण संख्यायें हैं।

गुप्ता तथा जैन[6] द्वारा दिये गये H-फलन के गुण

$$H_{p,q}^{k,l}\left[x \Big/ \begin{matrix} {}_1(a_j,\ n_j\ /h)_p \\ {}_1(b_j,\ m_j/\ h)_q \end{matrix}\right] = Ch\ G_{P,Q}^{K,L}\left[Bx^h \Big/ \begin{matrix} {}_1[\triangle(n_j,\ a_j)]_p \\ {}_1[\triangle(m_j,\ b_j)]_q \end{matrix}\right], \tag{1·6}$$

जहाँ h, सभी n तथा सभी m धन पूर्णांक हैं,

$\triangle(n, a)$ के द्वारा n प्राचलों के सेट $\frac{a}{n},\ \frac{a+1}{n}, \frac{n+2}{n},\ \ldots\ldots,\ \frac{a+n-1}{n}$ का बोध होता है

${}_1[\triangle(n_j,\ a_j)]_p$ के द्वारा $\triangle(n_1,\ a_1),\ \triangle(n_2,\ a_2),\ \ldots,\ \triangle(n_p,\ a_p).$

$$K=\sum_{j=1}^{k} m_j,\ L=\sum_{j=1}^{l}\ (n_j),\ P=\sum_{j=1}^{p}\ (n_j),\ Q=\sum_{j=1}^{q}\ (m_j),$$

$$C=\left[\frac{(2\pi)^{k+l-1/2(p+q)}\prod_{j=1}^{p}(n_j)^{1/2-a_j}}{(2\pi)^{K+L-1/2(P+Q)}\prod_{j=1}^{q}(m_j)^{1/2-b_j}}\right]$$ तथा $$B=\frac{\prod_{j=1}^{p}(n_j)^{n_j}}{\prod_{j=1}^{q}(m_j)^{m_j}}$$ का बोध होता है।

G-फलन [2, p. 434-444] की निम्नांकित विशिष्ट दशायें

$$G_{p,q}^{1,l}\left[x\left|\begin{matrix}{}_1(a_j)_p\\ {}_1(b_j)_q\end{matrix}\right.\right]=\frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1+b_1-a_j)\,x^{b_1}}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma(1+b_1-b_j)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_1)} \tag{1·7}$$

$$\times{}_pF_{q-1}\,[(1+b_1-a_j)_p;\ {}_2(1+b_1-b_j)_q;\ -x].\ p\leqslant q$$

$$2^{-1}\pi^{-1/2}\,G_{1,3}^{2,1}\left[x^2\left|\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\\ v,\ o,\ -v\end{matrix}\right.\right]=I_v(x)\,K_v(x) \tag{1·8}$$

$$G_{0,2}^{2,0}\left[x\,\middle|\,a,\ b\right]=2x^{1/2(a+b)}K_{a-b}(2\sqrt{x}) \tag{1·9}$$

सूत्र [3, p. 4 (11)]

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2-1/2m}\,(m)^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right). \tag{1·10}$$

2. इस शोधपत्र में निम्नांकित प्रमुख फलों की स्थापना की जावेगी

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-x}\,{}_1F_1\,(a;\,b;\,x)\,I_v(\tfrac{1}{2}y)\,K_\rho\,(\tfrac{1}{2}y)$$

$$\times H_{p,q}^{m,l}\left[zx^\sigma y^\lambda\left/\begin{matrix}{}_1(a_j,\ e_j)_p\\ {}_1(b_j,\ f_j)_q\end{matrix}\right.\right]dx\ dy=\frac{\Gamma(b)\ 2^{2\beta-2}}{\Gamma(b-a)}$$

$$\times H_{p+6,\,q+2}^{m+2,\,l+3}\left[z2^{2\lambda}\left/\begin{matrix}(1-\alpha_1\sigma),\left(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\nu}{2}\pm\frac{\rho}{2},\frac{\lambda}{2}\right),{}_1(a_j,\ e_j)_l,\ (b-\alpha,\ \sigma)\\ (b-a-\alpha,\ \sigma),\ (1-\beta,\ \lambda)\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\rho}{2},\frac{\lambda}{2}\right),\left(\tfrac{1}{2}\nu-\frac{\beta}{2}-\frac{\rho}{2}+1,\ \frac{\lambda}{2}\right),{}_{l+1}(a_j,\ e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right],$$

यदि $Re\ (b-a)>Re\ (\alpha+\sigma b_j/f_j)>0, j=1$ से m, $Re\ (b)>0$, $Re\left(\alpha+\sigma\frac{1-\beta}{\lambda}\right)>0$

$$Re\,(-\nu\pm\rho)< Re\left(\beta+\lambda\,\frac{a_i-1}{e_i}\right)<1,\ i=1 \text{ से } l,\ Re\left(\beta-\frac{\lambda a}{\sigma}\right)<1,$$

$$\sigma>0,\ \lambda>0,\ \theta>0 \text{ तथा } |\arg z|<\frac{\theta\pi}{2}.$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,e^{-x}\,{}_1F_1\,(a;\,b;\,x)\,\mathcal{J}_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}y})\,K_\rho(\sqrt{\tfrac{1}{2}y}) \tag{2·2}$$

$$\times H^{m,\,l}_{p,q}\left[zx^\sigma y^\lambda \,\Big/\, \begin{matrix}{}_1(a_j,\,e_j)_p\\ {}_1(b_j,\,f_j)_q\end{matrix}\right]dx\,dy=\frac{2^{\beta-2}\Gamma(b)}{\pi\Gamma(b-a)}$$

$$H^{m+1,\,l+3}_{p+5,\,q+2}\left[z2^\lambda \,\Big/\, \begin{matrix}(1-\alpha,\,\sigma),\,\left(1-\rho-\frac{\beta}{2},\,\frac{\lambda}{2}\right),\,\left(1-\frac{\beta}{2},\,\frac{\lambda}{2}\right),\,{}_1(a_j,\,e_j)_l\\ (b-a-\alpha,\,\sigma),\,{}_1(b_j,\,f_j)_m,\,\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}-\frac{\beta}{4},\,\frac{\lambda}{4}\right),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(b-\alpha_1\sigma),\,\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\beta}{4}+1,\,\frac{\lambda}{4}\right),\,{}_{l+1}(a_j,\,e_j)_p\\ {}_{m+1}(b_j,\,f_j)_q\end{matrix}\right],$$

यदि $\sigma>0,\ \lambda>0,$

$$Re\,(b-a)> Re\,(\alpha+\sigma b_i\,|f_i)>0,\ Re\,(\beta+\rho+\lambda b_j\,|f_j)>|\,Re\,\rho\,|,\ j=1 \text{ से } m,$$

$$Re\,(b)>0,\ \theta>0 \text{ तथा } |\arg z|<\frac{\theta\pi}{2},$$ जहाँ θ (1·2) की भाँति है।

प्रथम फल की उपपत्ति

(1·1) में से मेलिन-बार्नीज समाकल के पदों में H-फलन के मान समाकल्य (2·1) में रखने पर तथा समाकलन के क्रम को उलट देने पर, जो उपर्युक्त अवस्था में प्रक्रिया में निहित समाकलों की परम अभिसरणीयता के कारण वैध है

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_ju)\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1-a_j+e_ju)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_ju)\prod_{j=l+1}^{p}\Gamma(a_j-e_ju)}\,z^u$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha+\sigma u-1}\,y^{\beta+\lambda u-1}\,e^{-x}\,{}_1F_1\,(a;\,b;\,x)\,I_v\,(\tfrac{1}{2}y)\,K_\rho\,(\tfrac{1}{2}y)\,dx\,dy.$$

अब (1·3) की सहायता से आन्तरिक द्वगुण समाकल का मान ज्ञात करने पर वांछित फल प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (1·1) तथा (1·4) की सहायता से (2·2) का भी मान निकाला जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें

यदि (2·1) में $z=-t,\ a=0,\ 1-b_j=b_j,\ 1-a_j=a_j,\ q-1=q,\ \rho=\nu=-\frac{1}{2},\ m=1$ तथा समस्त e तथा f इकाई हों तो (1·6), (1·7), (1·8), (1·9) तथा (1·10) का उपयोग करने पर, जब λ तथा σ धन पूर्णांक रहें, यह (1·5) का रूप धारण कर लेता है।

यदि समस्त e तथा f इकाई हों तो (3·1)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-x}\,{}_1F_1(a;b;x)\,I_\nu(\tfrac{1}{2}y)\,K_\rho(\tfrac{1}{2}y)\times G^{m,l}_{p,q}\left[zx^\sigma y^\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}{}_1(a_j)_p\\ {}_1(b_j)_q\end{matrix}\right]dx\,dy=\frac{\Gamma(b)2^{3\beta-2}}{\Gamma(b-a)}$$

$$H^{m+2,\,l+3}_{p+6,\,q+3}\left[z2^{2\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\alpha,\sigma),\left(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\nu}{2}\pm\frac{\rho}{2},\frac{\lambda}{2}\right),\ {}_1(a_j,1)_l,\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\rho}{2}+1,\frac{\lambda}{2}\right),(b-\alpha,\sigma),\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\rho}{2},\frac{\lambda}{2}\right)_{l+1}(a_j,1)_p\\ (b-a-\alpha,\sigma),(1-\beta,\lambda),\ {}_1(b_j,1)_q\end{matrix}\right],\tag{3·2}$$

यदि $Re\,(b-a)>Re\,(\alpha+\sigma b_j)>0,\ j=1$ से $m,\ Re\,(b)>0,\ Re\left(\alpha+\sigma\frac{1-\beta}{\lambda}\right)>0,$
$Re\,(-\nu\pm\rho)<Re\,[\beta+\lambda(a_i-1)]<1,\ i=1$ से $l,\ Re\left(\beta-\frac{\lambda\alpha}{\sigma}\right)<1,\ \sigma>0,\ \lambda>0,$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi.$

यदि $a=0,\ \nu=\rho=-\frac{1}{2},\ \lambda=\sigma-1,$ तो (3·2) निम्नांकित में परिणत हो जाता है :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-(x+y)}G^{m,l}_{p,q}\left[zxy\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j)_p\\ {}_1(b_j)_q\end{matrix}\right]dx\,dy$$

$$=G^{m,\,l+3}_{p+2,\,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1-\beta,\ 1-\alpha,\ {}_1(a_j)_p\\ {}_1(b_j)_q\end{matrix}\right],\tag{3·3}$$

यदि $Re\,(\alpha+b_j)>0,\ j=1$ से $m,\ Re\,(\alpha+1\ \ \beta)>0,\ Re\,(\beta+a_i-1)<1,\ i=1$ से $l,\ Re\,(\beta-\alpha)<1$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$.

इसी प्रकार (2·2) की विशिष्ट दशायें भी प्राप्त की जा सकती हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० सी० नायर का अत्यन्त ग्राभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में उचित मार्गदर्शन किया ।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compos Math. 1964, **15**, 239-341
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, 1954, **भाग II, मैकग्राहिल**
3. वही, Transcendental Functions 1953, **भाग I, मैकग्राहिल**
4. फाक्स सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
5. गुप्ता, ग्रार० पी०, **नेशनल एके० साइंस इंडिया**, 1966, **36**
6. गुप्ता तथा जैन, **वही**
7. सिंह, आर० पी०, **प्रोसी० एडिनबरा मैथ० सोसा०**, 1964-65, **14**, 19

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April 1974, Pages 97-104

लाम्बिक बहुपदियों से सम्बद्ध दो चरों के सार्वीकृत फलन

मणिलाल शाह

गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० साइंस कालेज, इंदौर

[प्राप्त—अप्रैल 4, 1972]

सारांश

ज्ञात श्रेणी का उपयोग करते हुये बहुविख्यात लाम्बिक गेगेनबॉर बहुपदियों से सम्बद्ध दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिये एक प्रसार प्रमेय की स्थापना की गई है। साथ ही, इस प्रमेय का उपयोग बहुपदियों की लाम्बिकता गुण की सहायता से एक समाकल का मान निकालने के लिये किया गया है। कई विशिष्ट दशायें ज्ञात फलों के रूप में प्रदर्शित की गई हैं।

Abstract

On generalised functions of two variables concerned with orthogonal polynomials. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. Science College, Indore.

We establish here an expansion-theorem for generalized functions of two variables associated with classical orthogonal Gegenbauer polynomials using the known series. Further, this theorem has been utilized to evaluate an integral with the help of orthogonality-property of the polynomials. Several known and interesting results have been shown as particular cases of our findings.

1. भूमिका :

संकेत तथा परिभाषा

शर्मा [(10), pp. 26-40] द्वारा दिये गये दो चरों वाले सार्वीकृत माइजर के G-फलन को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$G\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right] \equiv G^{p,(q,r),(k,l)}_{A,[C,D],B[E,F]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\left|\begin{matrix} (a) \\ (c);\quad (d) \\ (b) \\ (e);\quad (f) \end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \Phi(s+t)\psi(s,t)\, x^s y^t\, ds\, dt, \tag{1·1}$$

जहाँ L_1, L_2 उपयुक्त कंटूर हैं तथा

$$\Phi(s+t)=\Gamma\left[\begin{matrix}(a_p)+s+t;\\ 1-(a_{p+1,A})-s-t,\ (b_B)+s+t\end{matrix}\right],$$

$$\psi(s,t)=\Gamma\left[\begin{matrix}1-(c_q)+s,\ (d_r)-s,\ 1-(e_k)+t,\ (f_l)-t;\\ (c_{q+1,C})-s,\ 1-(d_{r+1,D})+s,\ (e_{k+1,E})-t,\ 1-(f_{l+1,F})+t\end{matrix}\right],$$

$$\begin{cases}A\geqslant 1,\ B\geqslant 1,\ D\geqslant 1,\ F\geqslant 1;\\ 0\leqslant p\leqslant A,\ 0\leqslant q\leqslant C,\ 0\leqslant r\leqslant D,\ 0\leqslant k\leqslant E,\ 0\leqslant l\leqslant F.\end{cases}\tag{1·2}$$

इसमें से $x=0$, $y=0$ मानों को निकाल दिया गया है ।

संक्षेपण की दृष्टि से संकेत (a) द्वारा A-प्राचलों का सेट $a_1, a_2, \ldots, a_A$ और इसी प्रकार से संकेत (b), (c), (d), (e) तथा (f) द्वारा संगत सेट व्यक्त किये जावेंगे ।

संकेत $(a_{m,p})$ से $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_p$ तथा (a_p) से $(a_{1,p})$ मान लिया गया है जब $m=1$ ।

यहीं नहीं, $\Gamma\left[\begin{matrix}(a_{m,n});\\ (b_{p,q})\end{matrix}\right]$ के द्वारा गुणनफल $\dfrac{\Gamma[a_m]\Gamma[a_{m+1}]\ldots\Gamma[a_n]}{\Gamma[b_p]\Gamma[b_{p+1}]\ldots\Gamma[b_q]}$ व्यक्त होगा ।

द्विगुण कंटूर समाकल (1·1) अभिसारी होगा यदि

$$\text{(i)}\quad\begin{cases}2(p+q+r)>A+B+C+D,\ |\arg(x)|<[p+q+r-\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)]\pi,\\ 2(p+k+l)>A+B+E+F,\ |\arg(y)|<[p+k+l-\tfrac{1}{2}(A+B+E+F)]\pi.\end{cases}$$

अथवा

$$\text{(ii)}\quad\begin{cases}A+C<B+D,\ A+E<B+F,\\ \text{या } A+C=B+D,\ A+E=B+F \text{ जहाँ } |x|<1,\ |y|<1.\end{cases}$$

अग्रवाल [(2), p. 537] ने भी उपर्युक्त फलन की परिभाषा कुछ भिन्न रूप में दी है ।

प्रस्तुत शोधपत्र में ऐस्के रिचर्ड की ज्ञात श्रेणी की सहायता से दो चरों वाले सार्वीकृत माइजर फलन के लिए एक प्रसार सूत्र की स्थापना की गई है । इस प्रमेय तथा गेगेनबॉर बहुपदी के लाम्बिकता गुण का सदुपयोग करते हुये सार्वीकृत फलन तथा गेगेनबॉर बहुपदी के गुणनफल वाले एक समाकल का मान ज्ञात किया गया है । कई ज्ञात रोचक फल प्राप्त परिमाणों की विशिष्ट दशाओं के रूप में उदाहरण स्वरूप प्रस्तुत किये गए हैं ।

2. ज्ञात सम्बन्ध

इस शोध पत्र में हमने निम्नांकित सम्बन्धों का व्यवहार किया है :

(a) हाल ही में ऐस्के रिचार्ड[1] ने निम्नांकित श्रेणी स्थापित की है

$$(\sin\theta)^{2\gamma} C_n^{\gamma}(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}^{\gamma,\xi}\; C_{n+2m}^{\xi}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\xi} \tag{2·1}$$

जहाँ $$A_{m,n}^{\gamma,\xi}=\frac{2^{2\xi-3\gamma}\,\Gamma(\xi)(n+2m+\xi)(n+2m)!\,\Gamma(n+2\gamma)\Gamma(n+m+\xi)\Gamma(m+\xi-\gamma)}{n!\,m!\,\Gamma(\gamma)\Gamma(\xi-\gamma)\Gamma(n+m+\gamma+1)\Gamma(n+2m+2\xi)}$$

तथा $\frac{\xi-1}{2}<\gamma<\xi$, $A_{m,n}^{\gamma,\xi}>0$, तथा गेगेनबॉर बहुपदी $C_n^{\gamma}(\cos\theta)$[(7), p. 277, (1)] की परिभाषा जनक सम्बन्ध

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\gamma}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\gamma}(\cos\theta)t^n \text{ द्वारा दी जाती है।} \tag{2·2}$$

(2·1) **की विशिष्ट दशायें :**

(i) $\xi=1$, मानने पर हमें जेगो[9] द्वारा स्थापित सुप्रसिद्ध श्रेणी

$$(\sin\theta)^{2\gamma-1} C_n^{\gamma}(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}^{\gamma}\sin(n+2m+1)\theta, \tag{2·3}$$

प्राप्त होती है जहाँ

$\gamma>0$, $\gamma\neq1, 2, \ldots$ तथा

$$A_{m,n}^{\gamma}=\frac{2^{2-2\gamma}(n+m)!\,\Gamma(n+2\gamma)\Gamma(m-\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)m!\,n!\,\Gamma(n+m+\gamma+1)}.$$

(ii) इसमें $n=0$, $\xi=1$ रखने तथा γ के स्थान पर $1-s$ रखने पर यह मैकराबर्ट की ज्ञात फूरियर श्रेणी में परिणत[6] हो जाता है।

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}(\sin\theta)^{1-2s}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(s)_t}{(2-s)_t}\sin(2t+1)\theta,\; 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\; Re(s)\leqslant\tfrac{1}{2}. \tag{2·4}$$

(b) गेगेनबॉर बहुपदी [(7), p. 283, (37)] का एक प्रसार-प्रमेय

$$C_n^{\gamma}(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(\gamma)_m(\gamma)_n}{m!\,n!\,(1-\gamma-n)_m}\cos(n-2m)\theta. \tag{2·5}$$

(c) गेगेनबॉर बहुपदियों [(7), p. 281, (27) तथा (28)] के लिये लाम्बिक सम्बन्ध

$$\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2\gamma}C_n^{\gamma}(\cos\theta)\,C_m^{\gamma}(\cos\theta)\,d\theta=\begin{cases}0, & \text{यदि } m\neq n,\\ \dfrac{(2\gamma)_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}{n!\,(\gamma+n)\Gamma(\gamma)}, & \text{यदि } m=n, \text{ तथा } Re(\gamma)>-\tfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{2·6}$$

(*d*) लेगेण्ड्र का द्विगुणन सूत्र [(7), p. 24, (2)] :

$$\sqrt{\pi}\ \Gamma(2m)=2^{2m-1}\ \Gamma(m)\ \Gamma(m+\tfrac{1}{2}). \tag{2·7}$$

3. प्रसार-प्रमेय तथा समाकल

इस अनुभाग में दो चरों तथा गेगेनबॉर बहुपदियों के सार्वीकृत फलनों के लिये निम्नांकित दो सूत्र प्राप्त किये गए हैं।

(i) जिस प्रसार-प्रमेय की स्थापना करनी है वह है :

$$\sum_{m=0}^{\infty} G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,D+3],B,[E,F]}\left[\begin{matrix}4\alpha x^{\rho}\\ \beta y^{\sigma}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(a)\\ (2-\xi-m,\ 1\ ,\ (c),\ (n+2,\ 2),\ (d)\\ (1,\ 1),\ (n+m+2,\ 1);\ (2-\xi,\ 1)\\ (b)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

$$\frac{2^{2\xi-2}\ \Gamma(\xi)\,(n+2m+\xi)\,(n+2m)!\ \Gamma(n+m+\xi)}{n!\ m!\ \Gamma(n+2m+2\xi)}\ C^{\xi}_{n+2m}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\xi}$$

$$=\sin^2\theta\ \sum_{u=0}^{n}\frac{(-n)_u}{n!\ u!}\ G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,D+3],B,[E,F]}\left[\begin{matrix}\dfrac{\alpha x^{\rho}}{\sin^2\theta}\\ \beta y^{\sigma}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(a)\\ (n+1,\ 1),\ (c),\ (1+u,\ 1),\ (1+n,\ 1)\\ (1,\ 1),(1,\ 1);\ (d),\ (n-u+1,\ 1)\\ (b)\\ (e);\quad (f)\end{matrix}\right]\\ \cos(n-2u)\theta$$

यदि ρ तथा σ धन पूर्णांक $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ तथा

(i) $\begin{cases}2(p+q+r)>A+B+C+D,|\arg(x)|<[p+q+r-\frac{1}{2}(A+B+C+D)]\pi,\\ 2(p+k+l)>A+B+E+F,|\arg(y)|<[p+k+l-\frac{1}{2}(A+B+E+F)]\pi\end{cases}$

अथवा

(ii) $\begin{cases}A+C<B+D,\ A+E<B+F,\\ \text{या फिर } A+C=B+D,\ A+E=B+F\quad |x|<1,\ |y|<1\ \text{ के सहित ।}\end{cases}$

(ii) जिस समाकल का मान निकाला जाना है वह है :

$$\sum_{u=0}^{n}\frac{(-n)_u}{n!\ u!}\int_0^{\pi} G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,D+3],\ B,[E,F]}\left[\begin{matrix}\dfrac{\alpha x^{\rho}}{\sin^2\theta}\\ \beta y^{\sigma}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(a)\\ (n+1,1),(c)\,(1+u,\ 1),\ (1+n,\ 1)\\ (1,\ 1),\ (1,\ 1);\ (d),\ (n-u+1,\ 1)\\ (b)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right]$$

$$\sin^2\theta\cos(n-2u)\theta\, C^{\xi}_{n+2v}(\cos\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi\Gamma(n+v+\xi)}{n!\,v!\,2\Gamma(\xi)}\,G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,\;D+3],B,[E,F]}\left[\begin{matrix}4\alpha x^{\rho}\\ \beta y^{\sigma}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(a)\\(2-\xi-v,1),\,(c),;(n+2,\,2).\,(d),\\(1,\,1),\,(n+v+2,\,1)(2-\xi,\,1)\\(b)\\(e);\,(f)\end{matrix}\right] \quad (3\cdot2)$$

जहाँ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ तथा $v=0,\,1,\,2,\,\ldots$.

उपपत्ति

प्रसार-प्रमेय (3·1) को स्थापित करने के लिये कंटूर समाकल (1·1) को (3·1) में बाईं ओर $G\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ के स्थान पर रखने पर हमें

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi(s+t)\psi(s,t)\frac{\Gamma(\xi+m-1+s)\Gamma(n+2-2s)2^{2s}\,\alpha^s\,x^{\rho s}\,\beta^t\,y^{\sigma t}}{\Gamma(1-s)\Gamma(n+m+2-s)\Gamma(\xi-1+s)}\,ds\,dt$$

$$\left\{\frac{2^{2\xi-2}\,\Gamma(\xi)(n+2m+\xi)(n+2m)!\,\Gamma(n+m+\xi)}{n!\,m!\,\Gamma(n+2m+2\xi)}\,C^{\xi}_{n+2m}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\xi}\right\} \quad (3\cdot3)$$

प्राप्त होता है जहाँ कंटूर L_1, s-तल में रहता है और $-i\infty$ से $+i\infty$ तक अपने लूपों सहित विस्तृत रहता है और आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त करता है कि $\Gamma[(d_r)-s]\;\Gamma(n+2-2s)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma[1-(c_q)+s]$, $\Gamma[(a_p)+s+t]$, $\Gamma(\xi+m-1+s)$ के पोल बाँई ओर पड़ेंगे।

इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण रहता है और आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त करता है कि $\Gamma[(f_l)-t]$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma[1-(e_k)+t]$ तथा $\Gamma[(a_p)+s+t]$ के पोल बाईं ओर पड़ेंगे।

संकलन तथा समाकलन के क्रम में परिवर्तन करना [(3), p. 500] तथा (3.1)/ में कथित प्रतिबन्धों के आधार पर वैध है अतः (2·1) के बल पर $\gamma=1-s$ होने पर हमें

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi(s+t)\;\psi(s,\,t)\,\alpha^s\,x^{\rho s}\,\beta^t\,y^{\sigma t}\,(\sin\theta)^{2-2s}\,.\,C^{1-s}_{n}\;(\cos\theta)\;ds\;dt. \quad (3\cdot4)$$

प्राप्त होता है।

अब $\gamma=1-s$ के लिये सम्बन्ध (2·5) का उपयोग करने पर तथा समाकलन और संकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर यह निम्नांकित रूप में परिणत हो जाता है :

$$\sin^2\theta \sum_{u=0}^{n} \frac{(-n)_u}{n!\,u!}\left\{\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \Phi(s+t)\psi(s,t).\right. \tag{3·5}$$

$$\left.\frac{\Gamma(-n+s)\Gamma(u+1-s)\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(1-s)\Gamma(-n+u+s)}\left(\frac{ax^\rho}{\sin^2\theta}\right)^s (\beta y^\sigma)^t\, ds\, dt\right\} \cos(n-2u)\theta$$

जिसमें (3·1 के दाईं ओर का वांछित व्यंजक प्राप्त होता है।

(ii) समाकल (3·2) का मान ज्ञात करने के लिये (3·1) में दोनों ओर $C_{n+2v}^{\xi}(\cos\theta)$ से गुणा करते हैं, दोनों पक्षों को 0 से π तक θ के प्रति समाकलित करते हैं तब समाकल तथा संकलन के क्रम को उलट देने पर हमें निम्नांकित की प्राप्ति होती है

$$\sum_{m=0}^{\infty} G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,D+3],B,[E,F]}\left[\begin{array}{c|c} 4ax^\rho & \begin{array}{c}(a)\\ (2-\xi-m,1),(c),;(n+2,2),(d),\\ (1,1),(n+m+2,1)(2-\xi,1)\\ (b)\\ (e);(f)\end{array}\\ \beta y^\sigma & \end{array}\right] \tag{3·6}$$

$$\frac{2^{2\xi-2}\,\Gamma(\xi)(n+2m+\xi)(n+2m)!\,\Gamma(n+m+\xi)}{n!\,m!\,\Gamma(n+2m+2\xi)}\int_0^\pi(\sin\theta)^{2\xi}$$

$$C_{n+2m}^{\xi}(\cos\theta)\quad C_{n+2v}^{\xi}(\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-n)_u}{n!\,u!}\int_0^\pi G^{p,(q+1;r+2),(k;l)}_{A,[C+3,D+3],B,[E,F]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{ax^\rho}{\sin^2\theta} & \begin{array}{c}(a)\\ (n+1,1),(c),(u+1,1)(n+1,1),\\ (1,1),(1,1);(d),(n-u+1,1)\\ (b)\\ (e);(f)\end{array}\\ \beta y^\sigma & \end{array}\right]$$

$$\sin^2\theta\cos(n-2u)\theta\; C_{n+2v}^{\xi}(\cos\theta)\,d\theta.$$

(3·6) के बाईं ओर (2·6) तथा (2·7) सम्बन्धों का सम्प्रयोग करने पर (3·2) के दाईं ओर का वांछित व्यंजक प्राप्त होगा।

4. विशिष्ट दशायें

$A=B=p=0$ होने पर (1·1) में द्विगुण समाकल माइजर के दो G-फलनों के गुणनफल [(4), p. 20, 7(1)] में टूट जावेगा :

$$G_{C,D}^{r,q}\left(x\middle|\begin{matrix}(c)\\(d)\end{matrix}\right) G_{E,F}^{l,k}\left(y\middle|\begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right).$$

अतः (3·1) तथा (3·2) में दोनों ओर $G_{E,F}^{l,k}\left(\beta y^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right)$ को निरस्त करने पर

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{C+3,D+3}^{r+2,q+1}\left(4ax^{\rho}\middle|\begin{matrix}(2-\xi-m,1),(c),(1,1),(n+m+2,1)\\(n+2,2),(d),(2-\xi,1)\end{matrix}\right) \tag{4·1}$$

$$\frac{2^{2\xi-2}\,\Gamma(\xi)(n+2m+\xi)(n+2m)!\,\Gamma(n+m+\xi)}{n!\,m!\,\Gamma(n+2m+2\xi)}\,C_{n+2m}^{\xi}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\xi}$$

$$=\sin^2\theta\sum_{u=0}^{n}\frac{(-n)_u}{n!\,u!}G_{C+3,D+3}^{r+2,q+1}\left(\frac{ax^{\rho}}{\sin^2\theta}\middle|\begin{matrix}(n+1,1),(c),(1,1),(1,1)\\(1+u,1),(1+n,1),(d),(n-u+1,1)\end{matrix}\right)\cos(n-2u)\theta$$

तथा

$$\sum_{u=0}^{n}\frac{(-n)_u}{n!\,u!}\int_0^{\pi}G_{C+3,D+3}^{r+2,q+1}\left(\frac{ax^{\rho}}{\sin^2\theta}\middle|\begin{matrix}(n+1,1),(c),(1,1),(1,1)\\(u+1,1),(n+1,1),(d),(n+u+1,1)\end{matrix}\right) \tag{4·2}$$

$$\sin^2\theta\cos(n-2u)\theta\;C_{n+2v}^{\xi}(\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{\pi\Gamma(n+v+\xi)}{n!\,v!\,2\Gamma(\xi)}G_{C+3,D+3}^{r+2,q+1}\left(4ax^{\rho}\middle|\begin{matrix}(2-\xi-v,1),(c),(1,1),(n+v+2,1)\\(n+2,2),(d),(2-\xi,1)\end{matrix}\right)$$

प्राप्त होगा जो प्रतिबन्ध $A=B=p=0$ के अन्तर्गत सही उतरेंगे ।

विशिष्ट दशायें

(i) (4·1) तथा (4·2), में $n=0$, $\xi=a=\rho=1$, रखने पर हमें ज्ञात फल मिलेंगे [(5) तथा (8)] ।

(ii) ज्ञात सम्बन्ध [(4), p. 215, (?)] को दृष्टि में रखते हुए

$$G_{q+1,p}^{p,1}\left(x\middle|\begin{matrix}1,b_1,\ldots,b_q\\a_1,\ldots,a_p\end{matrix}\right)=E(p;a_r:q;b_s:x)$$

जहाँ E मैकरावर्ट का E फलन है, मैकरावर्ट के E फलनों के लिये ज्ञात फूरियर श्रेणी [(6)] (4·1) से प्राप्त की जा सकती है ।

प्रस्तुत शोध पत्र में स्थापित सूत्र व्यापक गुण वाले हैं अतः इनका उपयोग विशुद्ध तथा सम्प्रयुक्त गणित और गणितीय भौतिकी की अनेक समस्याओं के विश्लेषण के लिये किया जा सकता है ।

निर्देश

1. एस्के, रिचार्ड, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1965, **16**(6), 1191-94.
2. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **31A**, 536-46.
3. ब्रामविच, टी० जे० टी० ए०, Theory of Infinite Series, 1926, **मैकमिलन, लन्दन**
4. एर्डेल्यी, ए०, HigherTranscendental Functions 1953 भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**
5. जैन, आर० एन०, **मैथमेटिका जैपोनिका**, 1966, **10**, 101-5·
6. मैकराबर्ट, टी० एम०, **मैथ० ज०**, 1961, **75**, 79-82·
7. रेनविले, ई० डी०, Special functions, 1960, **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क**
8. रूपनारायण, Compositio Math, 1966, **17**, **2**, 149-151.
9. जेगो, जी०, Orthogonal polynomials, 1939, **अमे० मैथ० सोसा० कलोकियम पब्लि० भाग** 23, **न्यूयार्क**
10. शर्मा, बी० एल०, Annales de la Soc. Sci. de Bruxelles, 1965, **79**, 26-40.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 105-114

फूरियर श्रेणी की करमाता संकलनीयता की नई कसौटी

पी० डी० कठल

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, मण्डला

[प्राप्त—अक्टूबर 8, 1972]

सारांश

करमाता ने संकलनीयता की नवीन विधि k^{λ} परिभाषित की और $\lambda>0$ के लिये उसकी नियमितता स्थापित की। विकोविक ने इस विधि द्वारा फूरियर श्रेणी की संकलनीयता की जांच के संदर्भ में निम्न परिणाम प्रकाशित किया :—

प्रमेय

यदि

$$\phi(t)=0\left(\frac{1}{\log\ 1/t}\right),\ t\rightarrow+0$$

तब किसी आवर्ती फलन $f(t)$ की जिसका आवर्तकाल 2π है और जो $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में लेबेग-संकलनीय है, फूरियर श्रेणी $k^{\lambda}(\lambda>0)$ संकलनीय होती है।

लेखक ने उपर्युक्त प्रमेय का व्यापकीकरण स्थापित करते समय पाया कि फूरियर श्रेणी के सन्दर्भ में संकलनीयता की क्षमता आंकने की दृष्टि के $k^{\lambda}(\lambda>0)$ विधि, संकलनीयता की बोरेल तथा हारमोनिक विधियों के समान आचरण करती है। अत: बोरेल और हारमोनिक विधियों के क्रमशः साहनी एवं लेखक तथा हिले एवं टेमरकिन के परिणामों के सदृश्य, प्रस्तुत प्रपत्र में सिद्ध किया गया है कि :

प्रमेय:

यदि,

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t|\phi(u)|\,dw=0(t),\ t\rightarrow0$$

तथा

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi/\lambda\log n}^{\eta}\frac{|\phi(t)|-\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right|}{t}.\exp\{-\lambda\log n\,(1-\cos t)\}\,dt=0\,(1)$$

जहाँ $\eta<\pi$ एक अचर राशि है, तब $f(t)$ की फूरियर श्रेणी $t=x$ बिन्दु पर $k^{\lambda}(\lambda>0)$ संकलनीय होती है और उसका योग $f(x)$ के तुल्य होता है।

Abstract

A new criterion for the Karmata summability of Fourier series. *By* P. D. Kathal, Government College, Mandla.

Karmata defined the k^{λ} method of summability in 1935 and established its regularity for $\lambda>0$. In 1965, Vučkovič published the following result concerning the the summability of Fourier series by this method:—

THEOREM. *If*

$$\phi(t)=0\left(\frac{1}{\log 1/t}\right),\ t\to+0$$

then the Fourier series of a function $f(t)$ which is periodic with period 2π and Lebesque-integrable in the interval $(-\pi,\pi)$, is summable $k^{\lambda}(\lambda>0)$.

The author while establishing a generalisation of the above theorem observed that concerning the summability of Fourier series $k^{\lambda}(\lambda>0)$ method behaves similar to Borel and Harmonic summability methods. Thus analogous to the results of Sahney and the author and Hille and Tamarkin on Boral and Harmonic summability respectively, the author has proved the following :

THEOREM. *If*

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t|\phi(u)|\,du=0(t),\ t\to+0$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi/\lambda\log n}^{\eta}\frac{|\phi(t)|-\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right|}{t}.\exp\{-\lambda\log n\,(1-\cos t)\}\,dt=0(1)$$

where $\eta<\pi$ *is a constant, then the Fourier series of* $f(t)$ *at* $t=x$ *is* $k^{\lambda}(\lambda>0)$ *summable to the sum* $f(x)$.

1. संकेत और परिभाषा

अनन्त श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_m\}$ है, करमाता विधि k^{λ}, $\lambda>0$ (Karamata Method k^{λ}) द्वारा संकलनीय कहलाती है, यदि अनुक्रम

$$S_n^{\lambda}=\left\{\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\lambda+n}\cdot\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}\lambda^m S_m\right\} \tag{1·1}$$

अभिसारी है।

उपर्युक्त परिभाषा में $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$ संख्याएँ प्रथम प्रकार की स्टारलिंग संख्याओं के निरपेक्ष मान हैं। इन संख्याओं को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं:—

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}x^m \tag{1·2}$$

जहाँ $n=0, 1, 2 \ldots, 0\leqslant m\leqslant n$

माना कि

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{1·3}$$

आवर्ती फलन $f(x)$ की जिसका आवर्तकाल 2π है और जो $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में लेबेग-समकलनीय है, फूरियर श्रेणी है।

इस पूरे शोध पत्र में हम निम्नलिखित संकेतों का प्रयोग करेंगे:—

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

एवं

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)|\,du$$

2. भूमिका

करमाता[1] ने संकलनीयता की नवीन विधि k^{λ} परिभाषित की और $\lambda>0$ के लिये उसकी नियमितता स्थापित की। फूरियर श्रेणी की संकलनीयता की जाँच करने के लिये k^{λ} विधियों का अनुप्रयोग सर्वप्रथम एग्न्यू[2] ने किया, परंतु दुर्भाग्यवश वे कोई लाभकारी परिणाम नहीं निकाल सके। इसके विपरीत उन्होंने यह पाया कि किसी संतत फलन की फूरियर श्रेणी k^1 विधि द्वारा भी संकलनीय नहीं है। k^{λ} विधियों की, फूरियर श्रेणियों की संकलनीयता स्थापित करने की क्षमता दर्शाने वाला प्रथम परिणाम विकोविक[3] ने स्थापित किया। लेखक[4] ने विकोविक के प्रमेय का व्यापकीकरण निम्न प्रमेय स्थापित करके किया है:—

प्रमेय (अ):—यदि

$$\Phi(t)=0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\}, \text{ जहाँ } t\to+0 \tag{2·1}$$

है तब (1·3) की फूरियर श्रेणी, x बिन्दु पर, प्रत्येक $\lambda>0$ मान के लिये, k^λ विधि द्वारा संकलनीय होती है और उसका योग $f(x)$ के तुल्य होता है।

साहनी[5] और सिद्दिकी[6] ने प्रतिबन्ध (2·1) के ही अन्तर्गत फूरियर श्रेणी की क्रमशः बोरेल एवं हारमोनिक संकलनीयता स्थापित की है। फूरियर श्रेणी की संकलनीयता की क्षमता आंकने की दृष्टि से, सिद्दिकी और साहनी के प्रमेय k^λ विधि तथा बोरेल और हारमोनिक विधियों की समानता की ओर इंगित करते हैं। इस दृष्टि-कोण से जब हम हिले एवं टेमरकिन[7] तथा साहनी एवं लेखक[8] के परिणामों को देखते हैं जिनमें फूरियर श्रेणी के अभिसरण की लेबेग-कसौटी के सदृश प्रतिबन्धों के अन्तर्गत क्रमशः हारमोनिक और बोरेल संकलनीयता स्थापित की गई हैं, तो इन परिणामों के समतुल्य k^4 विधि के परिणाम की अपेक्षा करना स्वाभाविक है। अतः इस शोध पत्र में लेखक ने निम्न प्रमेय स्थापित किया है:—

प्रमेय:—यदि

$$\Phi(t)=0(t), \text{ जब } t\to+0 \tag{2·2}$$

एवं

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi/\lambda\log n}^{\eta}\frac{|\phi(t)|-\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right|}{t}\exp\{-\lambda\log n\,(1-\cos t)\}\,dt=0(1) \tag{2·3}$$

जहाँ $\eta<\pi$ एक अचर राशि है, तब फूरियर श्रेणी (1·3), x बिन्दु पर, k^λ, $\lambda>0$ संकलनीय होती है और उसका योग $f(x)$ के तुल्य होता है।

3. प्रमेय की उपपत्ति में हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका—1[3]

यदि $\lambda>0$ और $0<t<\frac{\pi}{2}$ तब t के लिये एक समान,

$$\frac{|I_m\{\Gamma(\lambda e^{it}+n)\}|}{\Gamma(\lambda\cos t+n)\,.\,\sin\frac{1}{2}t}=\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\sin\frac{1}{2}t}+0(1)$$

जहाँ I_m अधिकल्पित भाग दर्शाता है और $\to n\infty$

प्रमेयिका—2.

यदि $\frac{1}{3}\leqslant a<1$

और $\Phi(t)=0(t)$, जब $t\to+0$

तो,

$$Z\equiv\lim_{n\to\infty}\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}\frac{[|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|-|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|]}{\exp\{\lambda\log n(1-\cos t)\}}dt=0$$

उपपत्ति—द्वितीय मध्यमान प्रमेय से,

$$Z=\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}\,.\,\frac{[|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|-|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|]}{\exp\{2\lambda\log n\,.\,\sin^2\frac{1}{2}t\}}dt$$

$$=0\left[\frac{1}{\exp\left\{2\lambda\log n\,.\,\sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda\log n}\right)\right\}}\right]\cdot\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}.$$

$$[|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|-|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|]\,dt$$

$$=0(1)\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}.\ 0(\log n\,.\,t^3)\,dt$$

$$=0\{(\log n)^{1-2\alpha}\}\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}|\phi(t)|\,dt$$

$$=0(\log n)^{1-3\alpha}$$

$=0(1)$ जब $n\to\infty$; चूँकि $\frac{1}{3}\leqslant\alpha<1$.

यह उपपत्ति को पूर्ण करता है ।

प्रमेयिका—3

यदि $0\leqslant\alpha<1$

और $\Phi(t)=0(t)$, जब $t\to+0$

तो,

$$I\equiv\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)\alpha}\frac{\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right|}{t}\,.\left[\frac{1}{\exp[\lambda\log n\,(1-\cos t)]}\right.$$

$$\left.\frac{1}{\exp\left[\lambda\log n\left\{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right\}\right]}\right].\ \sin(\lambda\log n\,.\,t)\,dt=0$$

उपपत्ति—

$$I=\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha} \frac{\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda \log n}\right)\right|}{t} \cdot \left[\frac{1}{\exp\left[\lambda \log n\,(1-\cos t)\right]} \frac{1}{\exp\left[\lambda \log n\left\{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{\lambda \log n}\right)\right\}\right]}\right] \cdot 0(1)$$

$$=\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha} \frac{\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda \log n}\right)\right|}{t} \cdot 0\left[\frac{t}{\exp\{\lambda \log n\,(1-\cos t)\}}\right] dt$$

$$=0\left[\frac{1}{\exp\left\{2\lambda \log n \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda \log n}\right)\right\}}\right] \cdot \int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha} \left|\phi\left(t+\left(\frac{\pi}{\lambda \log n}\right)\right)\right| dt$$

$$=0(1) \cdot \left[t+\frac{\pi}{\lambda \log n}\right]_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}$$

$=0(1)$, जब $n \to \infty$, चूँकि $0 \leqslant \alpha < 1$.

यह उपपत्ति को पूर्ण करता है ।

4. प्रमेय की उपपत्ति—

मान कि $S_m(x)$, फूरियर श्रेणी (1·3) का mवाँ आंशिक योग दर्शाता है, तब

$$S_m(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\,\frac{\sin\,(m+\frac{1}{2})t}{\sin\,\frac{1}{2}t}\,dt + 0(1)$$

और माना कि $S_m^{\lambda}(x)$, फूरियर श्रेणी के आंशिक योगों के अनुक्रम $\{S_m(x)\}$ का करमाता रूपान्तर (1·1) दर्शाता है । विकोविक[6] के अनुसार

$$S_n^{\lambda}(x)-f(x)=\left\{\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi}\right\} \cdot \int_0^{\pi} \phi(t) K_n(t)\, dt$$

जहाँ,

$$K_n(t)=\frac{\left\{\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \lambda^m \cdot \sin\,(m+\frac{1}{2})t\right\}}{\Gamma(\lambda+n)\cdot \sin \frac{1}{2}t}$$

(1·2) के अनुप्रयोग से हम स्थापित कर सकते हैं कि,

$$K_n(t)=\frac{I_m\{e^{it/2}\,\Gamma(\lambda e^{it}+n)/\Gamma(\lambda e^{it})\}}{\Gamma(\lambda+n)\cdot \sin \frac{1}{2}t}$$

निम्न गणना में A, n और t से स्वतंत्र कोई अचर राशि दर्शाता है जिसके मान का प्रत्येक बार समान होना आवश्यक नहीं है और δ एक इस प्रकार की धनात्मक संख्या है कि, $0<t<\delta$ के लिये,

$$1-\cos t > \left(\frac{1}{3}\right) t^2.$$

अब चूँकि, $\delta<t<\pi$ के लिये $\phi(t)$ परिबद्ध है और

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{An^{-\lambda(1-\cos\delta)}}{\sin(\frac{1}{2}\delta)}$$

अत:

$$\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi}\int_\delta^\pi \phi(t)K_n(t)\ dt\right| \leqslant A\frac{n^{-\lambda(1-\cos\delta)}}{\sin(\frac{1}{2}\delta)}$$

$$=0(1), \text{ जब } n\to\infty.$$

इसलिये

$$|S_n^\lambda(x)-f(x)| \leqslant A\cdot\int_0^\delta |\phi(t)K_n(t)|\,dt+0(1),\ (n\to\infty)$$

अब चूँकि

$$\frac{|I_m\{e^{it/2}\Gamma(\lambda e^{it}+n)/\Gamma(\lambda e^{it})\}|}{\sin\frac{1}{2}t} \leqslant \frac{A\,|I_m(\lambda e^{it}+n)|}{\sin\frac{1}{2}t}+A\,|Re\,\Gamma(\lambda e^{it}+n)|$$

जहाँ R_e वास्तविक भाग दर्शाता है, इसलिये हम पाते हैं कि,

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{A\left\{\frac{\Gamma(\lambda\cos t+n)}{\Gamma(\lambda+n)}\right\}|I_m(\lambda e^{it}+n)|}{\Gamma(\lambda\cos t+n)\cdot\sin\frac{1}{2}t}+\frac{A\Gamma(\lambda\cos t+n)}{\Gamma(\lambda+n)}$$

और चूँकि, $0<t<\delta$ के लिये,

$$\frac{\Gamma(\lambda\cos t+n)}{\Gamma(\lambda+n)} \leqslant A\cdot n^{-\lambda(1-\cos t)}$$

$$=A\cdot e^{-\lambda(1-\cos t)}\cdot\log n$$

$$\leqslant A\cdot e^{-(1/3)\lambda t^2}\log n$$

अत:

$$\int_0^\delta|\phi(t)K_n(t)|\,dt \leqslant A\cdot\int_0^\delta\frac{|\phi(t)|}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{|I_m\{\Gamma(\lambda e^{it}+n)/\Gamma(\lambda\cos t+n)\}|}{\exp\{\lambda\log n\cdot(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$+A\cdot\int_0^\delta|\phi(t)|\,e^{-(1/3)t^2\log n}\,dt$$

और चूँकि उपर्युक्त पद के दाहिने पक्ष के द्वितीय समाकल का मान $0(1/\sqrt{\{\log n\}})=0(1)$, जब $n\to\infty$ है, अतः प्रमेयिका-1 के अनुप्रयोग से अन्ततः हम पाते हैं कि जब $n\to\infty$,

$$|\overset{\lambda}{S_n}(x)-f(x)|\leqslant A\int_0^\delta \frac{|\phi(t)|\,.\,|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\sin\frac{1}{2}t}\exp^{-\lambda\log n(1-\cos t)}dt+0(1)$$

$$=0(1)\,.\int_0^\delta\frac{\phi(t)}{t}\,.\,\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt+0(1) \qquad (4\cdot 1)$$

अब प्रमेय की सत्यता प्रमाणित करने के लिये (4·1) के दाहिने पक्ष के समाकल का मान, $n\to\infty$ के लिये $0(1)$ सिद्ध करना पर्याप्त है।

माना कि

$$\int_0^\delta\frac{|\phi(t)|}{t}\,.\,\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=\left[\int_0^{\pi/\lambda\log n}+\int_{\pi/\lambda\log n}^{(\pi/\lambda\log n)^\alpha}+\int_{\pi/\lambda\log n)^\alpha}^{\delta}\right]\frac{|\phi(t)|}{t}\,.\,\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=K_1+K_2+K_3$$

जहाँ $\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ है।

अधिकल्पना के प्रतिबन्ध (2·2) से उपर्युक्त प्रथम समाकल

$$K_1=\int_0^{\pi/\lambda\log n}\frac{|\phi(t)|}{t}|.\,\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/\lambda\log n}\frac{|\phi(t)|}{t}.\;0(t\,.\,\log n)\,dt$$

$$=0(\log n)\int_0^{\pi/\lambda\log n}|\phi(t)|\,dt$$

$$=0(\log n)\,.\,0(1/\log n)$$

$=0(1)$, जब $n\to\infty$.

द्वितीय मध्य-मान प्रमेय और समाकल $\int|\phi(t)|\,dt$ की संततता से, $\left(\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)^\alpha<\delta'<\delta$ के लिये

$$K_3=\int_{(\pi/\lambda\log n)^\alpha}^{\delta}\frac{|\phi(t)|}{t}\,.\,\frac{|\sin(\lambda\log n\sin t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=0\left[\frac{(\log n)^\alpha}{\exp\left\{2\lambda\log n\,.\,\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)^\alpha\right.}\right].\int_{(\pi/\lambda\log n)^\alpha}^{\delta'}|\phi(t)|\,dt$$

$$=0\left[\frac{(\log n)^{\alpha}}{\exp\{(\log n)^{1-2\alpha}\}}\right].\,0(1)$$

$$=0(1),$$ जब $n\to\infty$, चूँकि $\alpha<\frac{1}{2}$

और अंत में, प्रमेयिका-2 के अनुप्रयोग से,

$$2K=2\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}.\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,\sin t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=2\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}.\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$=\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|}{t}.\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$-\int_{0}^{[(\pi/\lambda \log n)\alpha-(\pi/\lambda\log n)]}\frac{|\phi(t+\pi/\lambda\log n)|}{(t+\pi/\lambda\log n)}.\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|}{\exp[\lambda\log n\,\{1-\cos(t+\pi/\lambda\log n)\}]}\,dt+0(1)$$

$$=\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|-|\phi(t+\pi/\lambda\log n)|}{t}.\frac{|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|}{\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}}\,dt$$

$$+\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t+\pi/\lambda\log n)|}{t}\left[\frac{1}{\exp[\lambda\log n\,(1-\cos t)]}-\frac{}{\exp\left[\lambda\log n\left\{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right\}\right]}\right].\,|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|\,dt$$

$$+\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t+\pi/\lambda\log n)|}{\exp\left[\lambda\log n\left\{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right\}\right]}.\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)}\right]|\sin(\lambda\log n\,.\,t)|\,dt+0(1)$$

$$=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+0(1),$$ माना

अब परिकल्पना (2·3) से

$$\sigma_1=0(1)\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t)|-\left|\phi\left(t+\frac{\pi}{\lambda\log n}\right)\right|}{t}-\exp\{\lambda\log n\,(1-\cos t)\}\,dt$$

$$=0(1),$$ जब $n\to\infty$.

और प्रमेयिका-3 से,

$$\sigma_3=0(1)$$

इसलिये

$$K_2=0\left(\frac{1}{\log n}\int_{\pi/\lambda \log n}^{(\pi/\lambda \log n)\alpha}\frac{|\phi(t+\pi/\lambda \log n)|}{t(t+\pi/\lambda \log n}dt+0(1)\right.$$

$$=0\left[\frac{1}{(\log n)^{1-\alpha}}\right]+0(1)$$

$$=0(1)$$, जहाँ $n\to\infty$; चूँकि $0<\alpha<1$

साध्य उपपन्न हुई।

निर्देश

1. करमाता, जे०, **मेथामिटिका**, 1935, **9**, 164,178
2. एगन्यू, आर० पी०, **मिचिगन मैथ० जर्न०**, 1957, **4**, 105-128
3. विकोविक, वी०, **मैथ० जेड**, 1965, **89**, 192-195
4. कठल, पी० डी०, **रिव्हि० मेट० यूनि० पारमा इटली**, 1969, (2) **10**, 33-38
5. साहनी, बी० एन०, **बाल० यू० मेट० इटली**, 1961, (3)**16**, 44-47
6. सिद्दिकी, जे० ए०, **प्रोसी० इन्डियन एके० साइन्स**, 1948, **28A**, 527-531
7. हिले, ई० तथा टेमरकिन, जे० डी०, **टी० ए० एम० एस०** 1932, **34**, 757-783
8. साहनी, वी० एन० तथा कठल, पी० डी०, **कनै० मैथ० बुले०**, 1969, **12** (5), 573-580

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 115-119

अष्टि के रूप में बेटमैन के फलन वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

एच० एल० गुप्ता
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरिंग कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 30, 1973]

सारांश

लैप्लास परिवर्त की सहायता से अष्टि के रूप में बेटमैन के फलन वाले एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन प्राप्त किया गया है ।

Abstract

Inversion of an integral equation involving Bateman's function as the kernel. *By* H. L. Gupta, Department of Mathematics, Government Engineering College, Ujjain.

An integral equation with Bateman's function as the kernel is inverted with the help of Laplace transform.

1. **भूमिका :**

रूसिया[2] ने दिखाया है कि समाकल समीकरण

$$\int_0^t K_{2n+2}(t-u)g(u)\,du=f(t) \tag{1·1}$$

का हल

$$g(t)=\frac{(-1)^n}{2(n-1)!}\int_0^t e^{t-u}\,.\,(t-u)^{n-1}\,.\,[(D+1)^{n+2}f(u)]\,du, \tag{1·2}$$

है यदि $f(t)\in C^{n+2}$, $0\leqslant t<\infty$ तथा $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=0$.

भारतीय[3] ने एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन दिया है जिसमें सार्वीकृत बेटमैन का फलन $\overset{2l}{K}_{2n}(x/2)$ निहित है ।

इस टिप्पणी में समाकल समीकरण (1·1) के प्रतिलोमन के लिये दो प्रमेय प्राप्त किये गये हैं। प्रमेय 1 को रूसिया[2] की अपेक्षा कम प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परिभाषित किया गया हैं। प्रतिबन्धों के एक भिन्न सेट के साथ प्रारम्भ करके तथा इससे भी कम प्रतिबन्धों के अन्तर्गत प्रमेय 2 प्राप्त किया गया है। उल्लेखनीय है कि इन प्रमेयों को भारतीय[3] के प्रमेयों से व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। प्राप्त फलों का सम्प्रयोग कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करने में किया गया है।

2. उपपत्ति के लिये आवश्यक फल :

लैप्लास परिवर्त

$$F(p)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re p>0 \text{ को}$$

$$F(p)\doteq f(t). \tag{2·1}$$

द्वारा प्रदर्शित करेगें।

एर्डेल्यी [4,p. 129, 131, p. 175, p. 214, p. 144] से हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी :

$$p^n F(p)\doteq f^{(n)}(t), \text{ यदि } f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0, \tag{2·2}$$

$$F_1(p)\,.\,F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)\,du, \tag{2·3}$$

जहाँ $F_1(p)\doteq f_1(t)$ तथा $F_2(p)\doteq f_2(t)$.

$$(p+1)^n(p-1)^{-n-1}\doteq e^t L_n(-2t),\ Re\ (p-1)>0, \tag{2·4}$$

$$2(-1)^n(p-1)^n(p+1)^{-n-2}\doteq K_{2n+2}(t),\ Re p>-1, \tag{2·5}$$

$$\Gamma(n)\,.\,(p+a)^{-n}\doteq t^{n-1}\,.\,e^{-at},\ Re n>0,\ Re p>-Re a \tag{2·6}$$

हमें बहुज्ञात फल

$$(D+1)^n\,.\,f(x)=e^{-x}D^n\{e^x f(x)\},$$

प्राप्त है जहाँ

$$D\equiv\frac{d}{dx}. \tag{2·7}$$

3. प्रमेय 1

माना कि

(i) $f'''(t)$ खण्डशः संतत है यदि $0\leqslant t<a<\infty$, तथा

(ii) $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$

तो समाकल समीकरण (1·1) का हल

$$g(t)=(-1)^{n}/2 \int_{0}^{t} e^{(t-u)} L_n\{2(u-t)\} \,.\, [(D+1)(D^2-1)f(u)]\, du \qquad (3\cdot 1)$$

होगा जहाँ $D \equiv d/du$, तथा L_n लॉगेर बहुपदी है ।

उपपत्ति: समीकरण (1·1) में (2·3) को व्यवहृत करने पर

$$F(p)=G(p)G_1(p), \text{ जहाँ } G(p) \doteq g(t) \text{ तथा } G_1(p) \doteq K_{2n+2}(t) \qquad (3\cdot 2)$$

(2·5) तथा (3·2) से हमें

$$G(p)=(-1)^{n}/2 \,.\, \frac{(p+1)^{n+2}}{(p-1)^{n}} F(p) \text{ प्राप्त होगा ।} \qquad (3\cdot 3)$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=(-1)^{n}/2 \,.\, [(p+1)^{n} \,.\, (p-1)^{-n-1}][(p^2-1)(p+1)F(p)]. \qquad (3\cdot 4)$$

(3·4) के दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लैप्लास परिवर्त लेने पर तथा (2·2), (2·3) और (2·4) का सम्प्रयोग करने पर हमें समाकल समीकरण (1·1) का हल (3·1) के रूप में प्राप्त होगा ।

4. **प्रमेय 2** :

माना कि

(i) n धन पूर्णांक है,

(ii) $(d/dt)^2\{e^t f(t)\}$ खण्डशः संतत है जब

$0 \leqslant t < a < \infty$,

तथा (iii) $f(0)=f'(0)=0$

तो समाकल समीकरण (1·1) का हल

$$g(t)=(-1)^{n}/2 \,.\, e^{-t}(d/dt)^2 e^t f(t)+(-1)^{n} \int_{0}^{t} e^{(t-u)} .$$
$$. L_{n-1}^{(1)} \{2(u-t)\} \,.\, e^{-u}[(d/du)^2 e^u f(u)]\, du. \qquad (4\cdot 1)$$

उपपत्ति : हम सम्बन्ध (3·3) को

$$G(p)=(-1)^{n}/2. [1+2/p-1]^{n} \,.\, [(p+1)^2 f(p)] \text{ के रूप में लिखते हैं ।} \qquad (4\cdot 2)$$

फल (2·6) का उपयोग करने पर यह सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है कि :

$$(1+2/p-1)^n=1+L\left\{e^t \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r \cdot \frac{2^r t^{r-1}}{(r-1)!}\right\} \tag{4·3}$$

$$=1+L\{2ne^t \, {}_1F_1(-n+1; 2; -2t)\}$$

$$=1+L\{2e^t L_{n-1}^{(1)}(-2t)\}.$$

(4·2) तथा (4·3) से हमें

$$G(p)=(-1)^n/2 \,.\, L\{(D+1)^2 f(u)\}+(-1)^n/2[L\{2e^t L_{n-1}^{(1)}(-2t)\}]. \tag{4·4}$$

$$.\,[L\{(D+1)^2 f(u)\}].$$

प्राप्त होगा जहाँ $D\equiv d/du$.

(2·2) व्युत्क्रम लेने तथा (4·4) में इसके सम्प्रयोग से (2·?) के प्रकाश में हमें (1·1) का हल (4·1) के रूप में प्राप्त होता है ।

स्पष्ट है कि हमें

$g(0)=(-1)^n/2[e^{-t}(d/dt)^2 e^t f(t)]_{t=0}$ प्राप्त हुआ ।

5. **सम्प्रयोग :** इस अनुभाग में हम अपने प्रमेयों का उपयोग निम्नांकित समाकलों का मान ज्ञात करने के लिये करेंगे :

$$\int_0^t e^{(t-u)} L_n\{2(u-t)\} \,.\, [(D+1)(D^2-1)e^{-u} \,.\, u^{n+1}]\, du=n(n+1)e^t t^{n-1}. \tag{5·1}$$

$$\int_0^t e^{(t-2u)} \,.\, u^{n-1} \,.\, L_{n-1}^{(1)}\{2(u-t)\}\, du=t^{n-1} \,.\, \sinh t. \tag{5·2}$$

उपपत्ति: हमें निम्नांकित तत्समक ज्ञात है

$$\left[\frac{2(-1)^n(p-1)^n}{(p+1)^{n+2}}\right]\left[\frac{\Gamma(n)}{(p-1)^n}\right]=\frac{2(-1)^n\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)}\left[\frac{\Gamma(n+2)}{(p+1)^{n+2}}\right] \tag{5·3}$$

(5·3) में (2·5) तथा (2·6) का सम्प्रयोग करने पर :

$$L\{K_{2n+2}(t)\} \,.\, L\{t^{n-1} \,.\, e^t\}=\frac{2(-1)^n}{n(n+1)} L\{t^{n+1} \,.\, e^{-t}\}. \tag{5·4}$$

(5·4) में संवलन प्रमेय (2·3) का उपयोग करने पर

$$\int_0^t K_{2n+2}(t-u) \,.\, u^{n-1} \,.\, e^u\, du=\frac{2(-1)^n}{n(n+1)} \,.\, t^{n+1} \,.\, e^{-t}. \tag{5·5}$$

(5·5) की तुलना (1·1) से करने पर

$$f(t) = \frac{2(-1)^n}{n(n+1)} \cdot t^{n+1}\, e^{-t} \text{ तथा } g(t) = t^{n-1} \cdot e^t.$$

(3·1) तथा (4·1) में क्रमशः $f(t)$ तथा $g(t)$ के मान रखने तथा सरल करने पर हमें वांछित फल (5·1) और (5·2) की प्राप्ति होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक गणित विभाग के प्रोफेसर डा० के० सी० रूसिया के प्रति अपना आभार प्रकट करता है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में उचित मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. विडर, डी० वी०, अमे० मैथ० मंथली, 1963, 70 (मार्च,) 291-9,3.
2. रूसिया, के० सी०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1967, 37(1), 67-70
3. भारतीय, पी० एल०, जर्न० इण्डियन, मैथ० सोसा०, न्यू सिरीज, 1964, 28 (3-4)
4. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, 1954, भाग I, मैक-ग्राहिल, न्यूयार्क

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April 1974, Pages 121-130

सूक्ष्मजीवाणु संबंधी नाइट्रोजन-यौगकीकरण पर मोलिब्डनम तथा सिलीनियम का प्रभाव

उषा जायसवाल तथा कृष्ण बहादुर
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

सारांश

प्रयाग की मिट्टी से तीन विभिन्न आकार वाले बैक्टीरियों को पृथक किया गया जो नाइट्रोजन-यौगिकीकरण कर सकते हैं। उन पर मोलिब्डनम का प्रभाव देखने पर ज्ञात हुआ कि नाइट्रोजन यौगकीकरण की गति में वृद्धि होती है, परन्तु उपभुक्त कार्बन की दर में कोई विशेष परिवर्तन नहीं होता।

इन्हीं तीनों बैक्टीरियों के पोषण माध्यम में सिलीनियम की विभिन्न सान्द्रतायें डाल कर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण पर प्रभाव देखा गया तो ज्ञात हुआ कि नाइट्रोजन-यौगिकीकरण तो बढ़ा ही, साथ ही उपयुक्त कार्बन की मात्रा भी मोलिब्डनम की अपेक्षा कुछ अधिक रही। यह क्रिया सिलीनियम ऑक्साइड की उच्च सान्द्रता पर ही अच्छी तरह होती है।

Abstract

Influence of molybdenum and selenium on microbial fixation of nitrogen. *By* Usha Jaiswal and K. Bahadur, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Effect of molybdenum on the fixation of nitrogen by the three bacterial samples isolated from Allahabad soil, has been observed to show an increase, but does not markedly affect the rate of consumption of carbon.

On the other hand, selenium oxide in the culture media of the same three bacterial samples shows an increase in the fixation of nitrogen as well as more carbon consumption than in the case of molybdenum oxide.

यह तथ्य हमें पहले से ही ज्ञात है कि धात्विक आयन बहुत सी जीव-रासायनिक अभिक्रियाओं में उत्प्रेरक के रूप में महत्वपूर्ण कार्य करते हैं। ये प्रयोग विशेष रूप से मिट्टी और पौधों में होने वाली

जीव-रासायनिक अभिक्रियाओं पर किये गये हैं। यह धात्विक आयन ऋणात्मक और धनात्मक दोनों प्रकार के उत्प्रेरक होते हैं। ह्वाङ्ग और डोई[1] ने इसी विचार की पुष्टि के लिये बहुत सी धातुओं पर प्रयोग किये और निरीक्षण करने के पश्चात् बताया कि मोलिब्डनम, आयरन और कैल्सियम की उपस्थिति में नाइट्रोजन-यौगिकीकरण की गति अधिक हो जाती है, परन्तु कोबाल्ट, कॉपर, बोरॉन, मैग्नीशियम, जिंक आदि के होने पर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। यही नहीं, टांग्स्टन इस यौगिकीकरण में प्रभावशाली निरोधक भी है।

इस लेख में हम सिलीनियम और मोलिब्डनम के उपयोग का विशेष रूप से उल्लेख करेंगे। इन दोनों में से मोलिब्डनम का कृषि में महत्वपूर्ण स्थान है। अहितकर मिट्टी में रहने वाले सूक्ष्मजीवों को मोलिब्डनम विलक्षण प्रतिरोध शक्ति प्रदान करता है[2] और यही बलिष्ठ सूक्ष्मजीव मिट्टी में रह कर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण में सहायता करते हैं और भूमि को उपजाऊ बनाते हैं। यही कारण है कि मोलिब्डनम का कृषि में एक प्रमुख स्थान है। कोवलस्काई, लेट्यूनोवा और ग्रिबोवस्काया[3] या ने ज्ञात किया कि ऐसे क्षेत्रों की मिट्टी में से पृथक् किये गये बैक्टीरिया जिसमें मोलिब्डनम की मात्रा कम है, मोलिब्डनम की अधिक मात्रा में भी प्रयोगशाला में हुये, नाइट्रोजन-यौगिकीकरण की वृद्धि नहीं कर सकते। परन्तु अधिक मोलिब्डनम के क्षेत्रों वाली मिट्टी से निकाले गये बैक्टीरिया उपर्युक्त परिस्थितियों में नाइट्रोजन-यौगिकीकरण की गति बढ़ा देते हैं। नाइट्रोजन-यौगिकीकरण के अतिरिक्त अन्य जीव-रासायनिक अभिक्रियाएं-जैसे-जैन्थाइन ऑक्सीडेस, नाइट्रेट रिडक्टेस और ऐल्डीहाइड ऑक्सिडेस आदि में भी मोलिब्डनम इलेक्ट्रॉन के आवागमन के द्वारा अभिक्रियाओं की गति बढ़ाने में सहायता करता है[4]। इस प्रकार मोलिब्डनम का जीव-रसायन में महत्वपूर्ण स्थान है।

मिट्टी में होने वाले जैविक नाइट्रोजन-यौगिकीकरण में मोलिब्डनम के महत्व का रैट्नर[5] ने 1964 में विस्तृत रूप से अध्ययन किया। कोवलस्काई, लेट्यूनोवा और ग्रिबोवस्काया ने ज्ञात किया कि एज़ोटोबैक्टर के ग्यारह विभेदों द्वारा मोलिब्डनम का उच्चतम मात्रा में संचय होता है। मॉर्टेन्सन, मोरिस और जेंग ने **क्लास्ट्रीडियम पैस्ट्यूरियानम** द्वारा नाइट्रोजन-यौगिकीकरण क्रिया में दो अवयव प्राप्त किये **मोलिब्डो-फेरेडॉक्सिन** और **एजोफेरेडॉक्सिन**। इनके गुणों और धात्विक संघटन का अध्ययन करने पर ज्ञात हुआ कि प्रत्येक मोलिब्डनम परमाणु के हिसाब से मोलिब्डनम फ़ेरेडॉक्सिन में एक परमाणु मैग्नीशियम का, बारह परमाणु आयरन के और तीन परमाणु सल्फाइड के होते हैं।

सिलीनियम का प्रभाव इस लेख का मुख्य ध्येय है। अभी तक सिलीनियम आयनों की उपस्थिति में मिट्टी के सूक्ष्मजीवाणुओं द्वारा नाइट्रोजन-यौगिकीकरण का अध्ययन बहुत ही कम अथवा नहीं के बराबर हुआ है। सिलीनियम का कृषिक एवं जैविक महत्व दर्शाने के लिये निम्न निर्देश देकर अपने प्रयोग की आधार शिला बना सकते हैं।

रासायनिक खाद एवं खनिज लवणों में सिलीनियम की उपस्थिति वेल्स[8] ने ज्ञात की। उन्होंने यह भी बताया कि यूरिया खाद में अन्य खादों की अपेक्षा सिलीनियम की मात्रा कम

होती है। हेडेगार्ड, फॉल्कोनी और कैलेब्रो ने बताया कि कुछ पौधों (जैसे **केन्ड्डा** एल्बीकन्स) में कृत्रिम माध्यम से सिलीनियम पौधों में समाविष्ट हो जाता है अर्थात् पेड़-पौधों को सिलीनियम की आवश्यकता होती है। आमीकीव, कोवल्स्काई और लेट्यूनोवा ने अनुशीलन कर यह दर्शाया कि मिट्टी में उपस्थित सिलीनियम आयनों का रूपान्तरण एवं संचयन फंजाई, बैक्टीरिया और यीस्ट के समान सूक्ष्मजीवों द्वारा होता है एवं इन जीवाणुओं की वृद्धि कम हो जाती है अर्थात् सिलीनियम मिट्टी के सूक्ष्मजीवों द्वारा प्रभावित हो जाता है।

उपर्युक्त निर्देशों के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि न केवल मोलिब्डनम अपितु सिलीनियम भी पौधों और मिट्टी में रहने वाले अन्य सूक्ष्मजीवों में समाविष्ट होकर उनकी वृद्धि पर महत्वपूर्ण प्रभाव डाल सकता है। अच्छी फ़सल के लिये सिलीनियम का उपयोग मोलिब्डनम की भाँति कृत्रिम खाद में मिला कर किया जा सकता है।

अतः हमने इस प्रयोग में प्रयाग की मिट्टी से कुछ बैक्टीरिया, जो नाइट्रोजन-यौगिकीकरण कर सकते हैं, पृथक् किये एवं मोलिब्डनम और सिलीनियम आयनों को अलग-अलग इन बैक्टीरियों के साथ मिला कर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण पर प्रभाव देखने की चेष्टा की है।

प्रयोगात्मक

प्रयोग में आने वाले निम्नलिखित विलयनों को काँच-आसुत जल में बनाया गया :

(1) सोडियम मोलिब्डेट 0·0968 ग्राम/लिटर (400 मामो)

(2) सिलीनियम आक्साइड 0·0444 ग्राम/लिटर (400 मामो)

इन स्टॉक विलयनों में जल की परिकलित मात्रा मिला कर हमने 25, 50, 75, 100 मामो सान्द्रता के विलयन तैय्यार कर लिए।

संवर्धन अथवा पोषण माध्यम बनाने हेतु निम्न तीन विलयनों ($व_1$, $व_2$ और $व_3$) की आवश्यकता हुई।

विलयन $व_1$: इसको बनाने के लिये सोडियम क्लोराइड 0·2 ग्रा, मोलिब्डिक अम्ल 0·01 ग्रा० और फेरस सल्फेट 0·001 ग्रा को 100 मिली जल में घोला गया। इस विलयन के पी-एच का मान 7.5 पर 0·15 मो फॉस्फेट-बफ़र (पी-एच 7·6) की सहायता से समायोजित किया गया।

विलयन $व_2$: मैग्नीशियम सल्फेट 0·2 ग्रा और कैल्सियम क्लोराइड 0·1 ग्रा को 250 मिली जल में घोल कर यह विलयन बनाया।

विलयन $व_3$: इस विलयन के बनाने हेतु 15 ग्रा. मैनिटॉल को उपर्युक्त भिन्न-भिन्न सान्द्रता वाले धात्विक आयन विलयनों के 250 मिली में घोला गया।

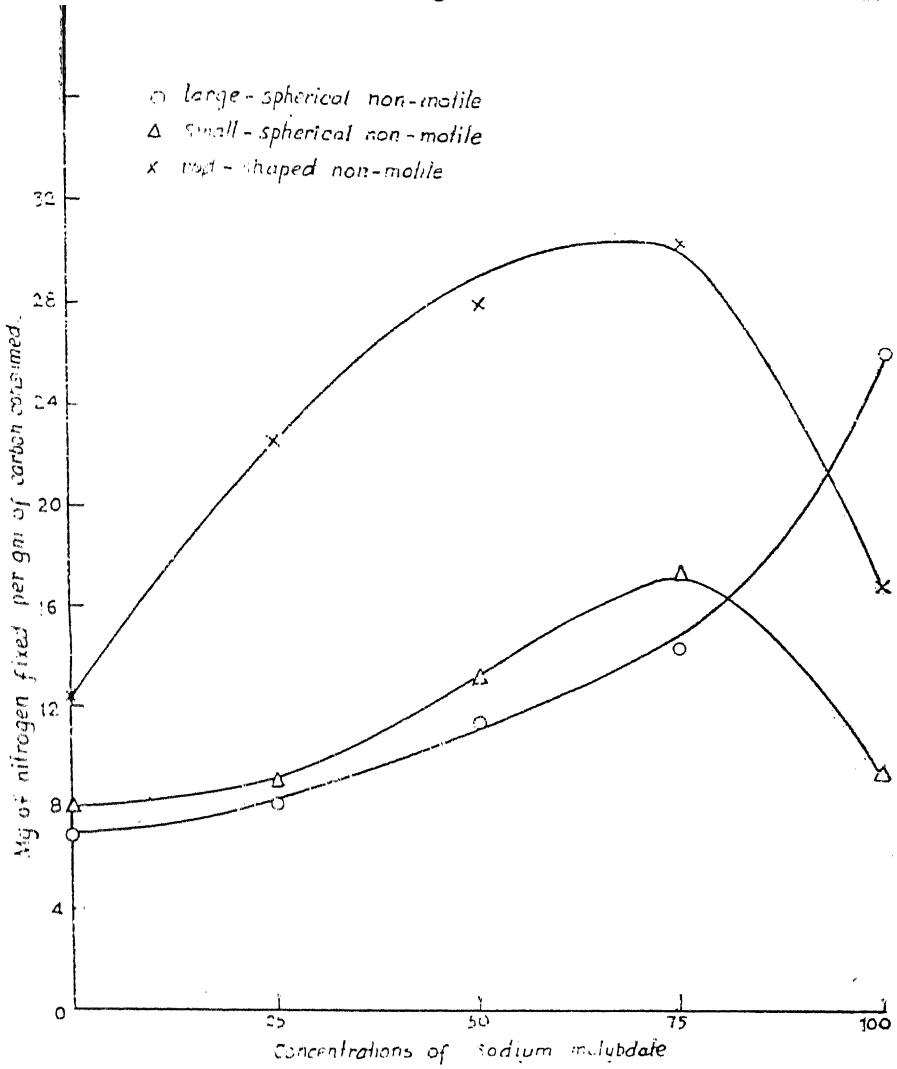
अब विलयन व$_1$, व$_2$ एवं व$_3$ का अलग-अलग जीवाणुनाशन किया गया। इसके पश्चात् उन्हें क्रमशः 2 : 1 : 1 के अनुपात में 100 मिली के शंक्वाकार फ्लास्कों में जैवविष-शून्य (aseptic) विधि द्वारा मिलाया गया। अब यह संवर्धन अथवा पोषण विलयन बन गया। इन शंक्वाकार फ्लास्कों में रखे विलयनों को क्रियान्वित करने के लिये बैक्टीरिया डाले गये। यहाँ तीन प्रकार के बैक्टीरियों पर अलग-अलग प्रयोग किये गये। इन सूक्ष्मजीवों को प्रयाग की मिट्टी से विलग किया गया था और ये नाइट्रोजन-यौगिकीकरण कर सकते थे। इन बैक्टीरियों को 'क'-जो बड़े-गोलाकार अचल, 'ख'-जो छोटे-गोलाकार अचल और 'ग'-जो दंडाकार अचल हैं, कहा गया। ये तीनों बैक्टीरिया एज़ोटोबैक्टर ग्रुप की तीन विभिन्न जातियां हैं। इन बैक्टीरियों को 5 दिन की आयु वाला बना कर निवेशन के लिये 0·2 मिली प्रत्येक प्रायोगिक (संवर्धक) विलयनों में जो ऊपर तैय्यार किया जा चुका है, जैवविष-शून्य विधि द्वारा डाला गया। यह प्रयोग सांख्यिकीय विधि का है।

निवेशन के अनन्तर सभी फ्लास्कों को 32°सें पर एक उष्मायित्र (इंक्यूबेटर) में 15 दिनों के लिये रख दिया गया। 15 दिनों बाद प्रत्येक संवर्धन या पोषण विलयन में से 1 मिली निकाल कर केल्डाल विधि[11] द्वारा कार्बन का आकलन कर लिया गया। नाइट्रोजन का आकलन भी इसी केल्डाल विधि[12–17] द्वारा किया गया। निष्कासित अमोनिया को 40% बोरिक अम्ल विलयन में, जिसमें टेशिरो का सूचक हो, शोषित कर लिया गया। टेशिरो का सूचक[18] बनाने के लिये 80 मिग्रा मेथिल रेड और 2·0 मिग्रा मेथिल ब्लू लेकर 20 मिली परिशुद्ध ऐल्कोहल में घोल लिया जाता है। अमोनिया की मात्रा को मानक सल्फ्यूरिक अम्ल द्वारा अनुमापन कर ज्ञात कर लिया गया।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 में हम वे वक्र दे रहे हैं जिनका सम्बन्ध मोलिब्डनम के प्रभाव से है और चित्र 2 में वे वक्र हैं जिनका सम्बन्ध सिलीनियम के प्रभाव से है। प्रत्येक चित्र में तीन बैक्टीरियों द्वारा यौगिकीकरण प्रदर्शित किया गया है। ये वक्र उपयुक्त कार्बन की अपेक्षा से यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा दर्शाते हैं। वे प्रभाव पोषण माध्यम में ही देखे गये हैं।

चित्र 1 में बैक्टीरिया 'क' के वक्र से स्पष्ट है कि शिखर बिन्दु 75 मामो सान्द्रता वाले मोलिब्डनम पर है। मोलिब्डनम की सान्द्रता बढ़ाने पर इस शिखर बिन्दु के बाद वक्र शनैः शनैः नीचे झुकने लगता है। इसका तात्पर्य यह है कि (जैसा सारणी 1 से विदित है) कि बैक्टीरिया 'क' मोलिब्डनम की 75 मामो सान्द्रता पर अधिकतम नाइट्रोजनीकरण करता है। बैक्टीरिया 'ख' के वक्र ने भी मोलिब्डनम की 75 मामो सान्द्रता पर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण का अपना शिखर बिन्दु दर्शाया (परन्तु बैक्टीरिया 'क' के वक्र से कुछ नीचे) अर्थात् बैक्टीरिया 'ख' भी नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा 75 मामो पर यौगिकीकरण करता है। मोलिब्डनम की सान्द्रता बढ़ाने पर इस बैक्टीरिया द्वारा भी नाइट्रोजन यौगिकीकरण की दर कम हो जाती है। बैक्टीरिया 'ग' का वक्र उपर्युक्त वक्रों से भिन्न है। इस वक्र का उच्चतम शिखर मोलिब्डनम की उच्चतम सान्द्रता (100 मामो) पर स्थित है और सान्द्रता के कम होने से वक्र भी झुकने लगता है।

उपर्युक्त परिणाम का आशय यह है कि कुछ बैक्टीरियाओं में मोलिब्डनम की सान्द्रता बहुत

चित्र 1

अधिक होने पर नाइट्रोजन-यौगिकीकरण की क्षमता कम हो जाती है और कुछ-बैक्टीरिया अधिक सान्द्रता पर भी नाइट्रोजन-यौगिकीकरण भली प्रकार कर सकते हैं।

इन्हीं तीनों बैक्टीरियों पर सिलीनियम आयनों की उपस्थिति में भी नाइट्रोजन-यौगिकीकरण की गति पर प्रभाव हमने देखा। यह प्रभाव भी पोषण माध्यम में ही देखा गया। बैक्टीरिया 'क' सिलीनियम ऑक्साइड की 100 मामो सान्द्रता पर उच्चतम शिखर दर्शाता है (चित्र 2) अर्थात् प्रयोग में आने वाली अन्य सान्द्रताओं की अपेक्षा 100 मामो सान्द्रता वाले सिलीनियम विलयनों में बैक्टीरिया

'क' नाइट्रोजन-यौगिकीकरण अच्छी तरह करता है। बैक्टीरिया 'ग' भी अपने आलेखित वक्र द्वारा यह दर्शाता है कि सिलीनियम में 100 मामो सान्द्रता पर नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा यौगिकीकृत होती

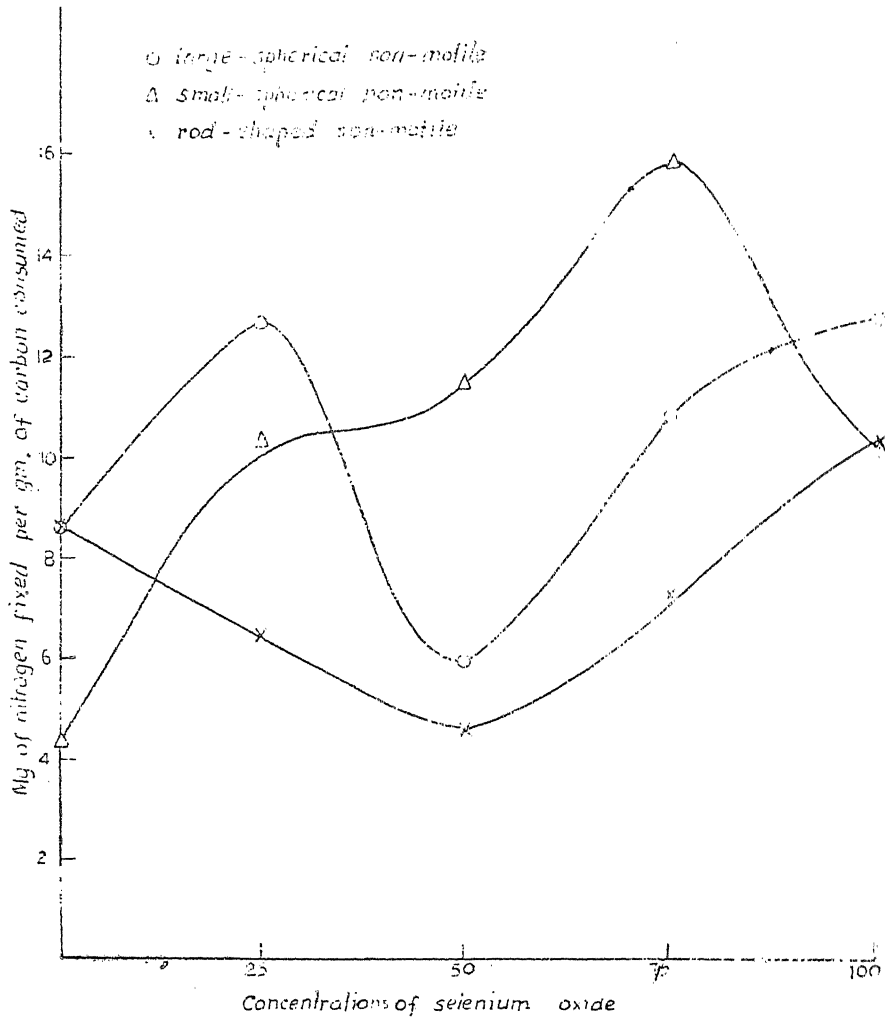



FIG. 2

चित्र 2

है। बैक्टीरिया 'ख' द्वारा सिलीनियम को 75 मामो सान्द्रता पर नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा यौगिकीकृत होती है। सान्द्रता को और अधिक बढ़ाने पर यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा धीरे धीरे कम होने लगती है।

सारणियों द्वारा भी यह ज्ञात होता है कि नाइट्रोजन यौगिकीकरण की गति सिलीनियम की उपस्थिति में भी अच्छी होती परन्तु मोलिब्डनम की अपेक्षा कुछ कम। इसके अतिरिक्त कार्बन की मात्रा का उपभोग सिलीनियम में मोलिब्डनम की अपेक्षा अधिक होता है।

सारणी 1

बैक्टीरिया 'क' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपभुक्त कार्बन की मात्रा (पी-एच 7·5 वाले पोषण माध्यम के मिली लीटर में, जिसमें सोडियम मोलिब्डेट की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)

मामो = माइक्रोमोलर, माग्रा = माइक्रोग्राम, मिग्रा = मिलीग्राम, ग्रा = ग्राम

धात्विक आयनों की सान्द्रता-मामो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा–माग्रा में	उपभुक्त कार्बन की मात्रा-मिग्रा में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा (मिग्रा०) प्रति उपभुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा)
0	40·6 ±1·400	3·21 ±0·233	12·64
25	47·6 ±1·400	2 03 ±0·205	23·42
50	79·8 ±2·800	2·84 ±0·227	28·06
75	86·8 ±1·715	2·80 ±0·315	30·91
100	50·4 ±2·619	2·81 ±0·2[illegible]6	17·89

सारणी 2

बैक्टीरिया 'ख' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपभुक्त कार्बन की मात्रा (पीएच 7·5वाले पोषण माध्यम के 1 मिलीलीटर में, जिसमें सोडियम मोलिब्डेट की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)

धात्विक आयनों की सान्द्रता-ा ममो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा-माग्रा में	उपभुक्त कार्बन की मात्रा-मिग्रा में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा (मिग्रा) प्रति उपभुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा)
0	32·2 ±1·715	4·01 ±0·221	8·02
25	40·6 ±1·400	4·43 ±0·272	9·16
50	72·8 ±1·715	5·42 ±0·262	13·43
75	79·8 ±2·800	4·43 ±0·247	17·98
100	51·8 ±1715	5·20 ±0·254	9·95

सारणी 3

बैक्टीरिया 'ग' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपभुक्त कार्बन की मात्रा (पी-एच 7·5 वाले पोषण माध्यम के 1 मिलीलीटर में, जिसमें सोडियम मोलिब्डेट की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)

धात्विक आयनों की सान्द्रता-मामो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा-माग्रा में	उपभुक्त कार्बन की मात्रा-मिग्रा में	यौगिकीक नाइट्रोजन की मात्रा (मिग्रा) प्रति उपभुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा०)
0	29·4 ±1·400	4·02 ±0·225	7·31
25	42·0 ±2·225	4·93 ±0·214	8·51
50	71·4 ±1·400	6·02 ±0·212	11·85
75	50·4 ±2·619	3·44 ±0·181	14·66
100	79·8 ±2·800	3·02 ±0·169	26·41

सारणी 4

बैक्टीरिया 'क' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपयुक्त कार्बन की मात्रा (pH 7·5 वाले पोषण माध्यम के 1 मिली लीटर में, जिसमें सिलीनियम आक्साइड की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)।

मामो=माइक्रो मोलर, माग्रा=माइक्रो ग्राम, मिग्रा=मिली ग्राम, सा० गु०=सांख्यिकीय गुणांक, औ० विच०=औसत विचलन

धात्विक आयनों की सान्द्रता-मामो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा-माग्रा में	उपयुक्त कार्बन की मात्रा- मिग्रा में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा(मिग्रा) प्रति उपयुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा)
0	32 2 ±1·852	3·68 ±0·183	8·74
25	51·8 ±1·715	8·02 ±0·498	6·46
50	40·6 ±1·400	8·84 ±0·489	4·59
75	50·4 ±1·400	6·88 ±0·484	7·33
100	71·4 ±1·400	7·03 ±0·495	10·16

सारणी 5

बैक्टीरिया-'ख' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपभुक्त कार्बन की मात्रा (पी-एच 7·5 वाले पोषण माध्यम के 1 मिली लीटर में, जिसमें सिलीनियम आक्साइड की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)

मामों=माइक्रो मोलर, माग्रा=माइक्रो ग्राम, मिग्रा=मिली ग्राम, ग्रा=ग्राम,

सा०गु० =सांख्यिकीय गुणांक, औ० विच० =औसत विचलन

धात्विक आयनों की सान्द्रता-मामो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा-माग्रा में	उपभुक्त कार्बन की मात्रा-मिग्रा में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा (मिग्रा) प्रति उपभुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा)
0	22·4 ±1·562	5·17 ±0·643	4·33
25	51·8 ±1·715	5·04 ±0·636	10·28
50	71·4 ±1·400	6·29 ±0·490	11·35
75	79·8 ±2·800	5·07 ±0·458	15·74
100	58·8 ±2·800	5·86 ±0·598	10·03

सारणी 6

बैक्टीरिया-'ग' द्वारा यौगिकीकृत नाइट्रोजन और उपभुक्त कार्बन की मात्रा (पी-एच 7·5 वाले पोषण माध्यम के 1 मिली लीटर में, जिसमें सिलीनियम आक्साइड की विभिन्न सान्द्रतायें हैं)

धात्विक आयनों की सान्द्रता-मामो में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा-माग्रा में	उपभुक्त कार्बन की मात्रा-मिग्रा में	यौगिकीकृत नाइट्रोजन की मात्रा (मिग्रा) प्रति उपभुक्त कार्बन की मात्रा (ग्रा)
0	43·4 ±1·400	5·17 ±0·481	8·39
25	58·8 ±1·715	4·62 ±0·715	12·73
50	43·4 ±1·400	7·31 ±0·442	[illegible]
75	37·8 ±1·715	3·53 ±0·492	10·71
100	71·4 ±1·400	5·69 ±0·580	12·55

निर्देश

1. व्हांग जे०सी० और डोई, एस०, **मक्को० कोगोकु० जाथो**, 1963, **41**(9), 474-801.

2. करसेविष, ई० के०, **डाकल० मॉस्क० सेलस्कोखोज़० एकेड०**, 1963, **84**, 224-29.

3. कोवल्स्काई वी० वी०, लेट्यूनोवा, एस० वी० और ग्रिबोवस्काया, आई० एफ०, **डोकल० एकेड० नॉक० एस० एस० एस० आर०**, 1967, **173**(1), 199-200.

4. स्पेन्स, जे० टी०, **यूटाह् स्टेट यूनिव०, लोगन**, 2. **नेचरविस, मेड० ग्रुन्लाजेनफोर्ष**, 1965, **2**(3), **267-83.**

5. रैट्नर, ई० आई०, **इज्वब० एकेड० नॉक० एस० एस० एस० आर०, सर० बाइल०**, 1964, **29** (2), 323-43.

6. कोवलस्काई, वी० वी०, लेट्यूनोवा, एस० वी० और ग्रिबोवस्काया, आई० एफ०, **एग्रोखीमिया**, 1966, **9**, 56-62.

7. मोर्टेन्सन, एल० आई०, मोरिस, जे० ए० और जेंग, डी० वाई०, **बायोकेम० बायोफिज० एक्टा०**, 1967, **141**(3), 516-22.

8. वेल्स, एन०, **न्यूज़ीलैण्ड ज० सा०**, 1966, **9**(2), 409-15.

9. हेडेगार्ड, जे०, फ़ाल्कोनी, जी० और कैलेब्रो, एस०, **कम्प्ट० रेण्ड० सोस० बाइल०**, 1963, **157**, 280-34.

10. कोवल्स्काई, वी० वी०, अर्मोकोव, वी० वी० और लेट्यूनोवा, एस० वी०, **ज़ह्० आव्शष० बाइल०** 1965, **26**(6), 634-45.

11. रॉबिन्सन, मक्लीन और विलियम्स, **ज० एग्री० सा०**, 1929, **19**, 315.

12. केल्डाल, जे० ज़ेड०, **एनाल० केम०**, 1883, **22**, 366.

13. गर्निंग, जे० डब्लू०, **ज़ेड० एनाल० केम०**, 1889, **28**, 188.

14. आर्नोल्ड, सी०, **केम० जेण्ट्र०**, 1892, **1886**, 337.

15. आर्नोल्ड, सी० और वेडेमेयर, के०, **जेड० एनाल० केम०**, 1892, **31**, 525.

16. मोर्वी, एच० सी०, **इन्ड० इन्ग० केम०**, 1920, **12**, 669.

17. प्रिंस, ए० एल०, **ज० एसोस० आफिसियल एग्र० केम०**, 1892, 410

18. टेशिरो, एस०, **एम० ज० फिजिओल०**, 1922, **60**, 519-43.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 131-135

सड़क निघर्षण स्तर में तारकोल-बालू मिश्रण का उपयोग

रमाशंकर शुक्ल तथा दूनीराम आर्य
सड़क अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली

[प्राप्त—नवम्बर 28, 1973]

सारांश

प्रकृति में पाई जाने वाली प्रत्येक बालू को तारकोल/डामर तथा पूरक द्वारा संशोधित करके प्राय: निघर्षण स्तर में प्रयोग में लाया जाता है। पूरक पदार्थ प्राय: सीमेन्ट अथवा चूना होता है जो महँगा है। कई प्रकार की महीन बालू के वर्गीकरण से यह देखा गया है कि उनमें पूरक की समुचित मात्रा सिल्ट के रूप में विद्यमान रहती है अतएव यदि मोटी और महीन बालू को एक निश्चित मात्रा में मिलाकर उसे डामर अथवा तारकोल द्वारा संशोधित कर दिया जाय तो वह निघर्षण स्तर पर पड़ने वाले भार को वहन करने के सक्षम हो जाती है और इस प्रकार सड़क निर्माण की लागत में भी कमी आ जाती है।

Abstract

Use of sand-tar mixtures in wearing course. *By* R. S. Shukla and D. R. Arya, Road Research Institute, New Delhi.

Each and every sand available in nature is used in the wearing course by improving it with the addition of filler and tar/bitumen. The filler material which is either cement or lime, is an expensive material. The sieve analysis of many sands has revealed that in them sufficient quantity of filler material is available in the form of silt. If a coarse and a fine sand is blended in a definite proportion and improved with the addition of bitumen/tar, it can very well withstand the traffic load. Also it can economise the road construction to a considerable extent.

पत्थर शताब्दियों से सड़क निर्माण की मुख्य सामग्री के रूप में प्रयुक्त होता रहा है। आज भी प्रत्येक सड़क का 95 प्रतिशत भार पत्थर रोड़ी द्वारा ही बनाया जाता है। यद्यपि पूर्णतया पत्थर के स्थान पर डामर-पत्थर मिश्रण धीरे-धीरे अपना स्थान बनाता जा रहा है है परन्तु देश के विस्तृत भवन

निर्माण तथा सड़क निर्माण कार्यक्रम को देखते हुए ऐसा प्रतीत होने लगा है कि शायद भविष्य में सड़क निर्माण के लिये पत्थर उपलब्ध न हो सके । इसके अतिरिक्त गंगा-यमुना के द्वाबे तथा राजस्थान के रेगिस्तान में, जहाँ पत्थर का सर्वदा जमाव रहा है, यदि बालू को उपयोग में लाया जाय तो सड़क निर्माण में काफी मितव्ययता लाई जा सकती है ।

साधारणतया डामर अथवा तारकोल-बालू मिश्रण प्रत्येक तह में (अध:आधार स्तर, आधार स्तर तथा निघर्षण स्तर) प्रयोग में लाये जा सकते हैं परन्तु निघर्षण स्तर में इसका उपयोग एक महत्वपूर्ण उपलब्धि है। इसके लिये इसमें कुछ विशेष आवश्यक गुण हैं :

हब्बार्ड फील्ड स्थायित्व	1200 पौण्ड निम्नतम
रिक्ति	10-18 %

यद्यपि प्रयोगों द्वारा यह सिद्ध हो चुका है कि जहाँ रिक्ति की भूमिका उतनी आवश्यक नहीं है जितनी कि स्थायित्व की, प्रकृति में पाई जाने वाली प्रत्येक बालू में रिक्ति की मात्रा 25-35 प्रतिशत तक होती है । डामर या तारकोल-बालू मिश्रण में उपर्युक्त स्थायित्व तथा रिक्ति प्राप्त करने के लिए पूरक का प्रयोग किया जाता है जो या तो सीमेन्ट या फिर चूना होता है । ये दोनों ही महँगे पदार्थ है अतएव यदि इनकी मात्रा कम कर दी जाय या इन्हें बिल्कुल प्रयोग में न लाया जाय तो सड़क निर्माण की लागत में काफी कमी की जा सकती है ।

प्रकृति में पाई जाने वाली प्रत्येक बालू में पूरक की काफी मात्रा सिल्ट के रूप में विद्यमान रहती है । रायफर[1] ने सिद्ध कर दिया है कि यदि बालू का वर्गीकरण एक निश्चित प्रकार का कर दिया जाय तो वह निघर्षण स्तर के भार को वहन करने के सक्षम होता है । अतएव यदि महीन तथा मोटी बालू को इस प्रकार मिलाया जाय कि रायफर के वर्गीकरण की पुष्टि कर सके तो उससे स्थायित्व तथा पूरक दोनों ही प्राप्त हो जाते हैं और इस प्रकार पूरक की आवश्यकता नहीं पड़ेगी ।

प्रस्तुत लेख में मोटी तथा महीन बालू को मिलाकर निघर्षण स्तर के योग्य बनाने पर बल दिया गया है तथा पूरक की मात्रा को महीन बालू से प्राप्त किया है ।

प्रयोगात्मक

तीन प्रकार की बालू-अर्थात् नदी बालू (जमुना बालू), खनिज बालू (बदरपुर बालू) तथा कृत्रिम बालू का चलनी द्वारा वर्गीकरण किया गया (सारिणी 1) । इसके बाद उसमें विभिन्न प्रतिशत में डामर मिला कर लगभग 10,000 पौण्ड का प्रतिबल देकर उससे 2″ व्यास तथा 1″ मोटे गोल चक्के बना लिये गये । उन चक्कों को 24 घण्टे तक ठण्डा करने के बाद आर्किमिडिज़ सिद्धान्त द्वारा उनका घनत्व ज्ञात किया गया और फिर उनका रिक्ति विश्लेषण किया गया । इसके बाद उन्हें लगभग 2 घण्टे तक [illegible] से० पर रखकर 2″ प्रति मिनट की विकृति पर उनका स्थायित्व ज्ञात किया गया (सारिणी 2) ।

सारिणी 1

बालू वर्गीकरण

चलनी नं०	खनिज बालू	प्रतिशत छनने वाली		रायफर
		नदी बालू	कृत्रिम बालू	
10 मि० मी०	...	...	100	...
480	100	...	97	100
200	93	...	80	90-100
40	36	100	51	40-85
20	5	50	27	10-40
8	2	7·5	10	0-8

सारिणी 2

इष्टतम तारकोल पर बालू/तारकोल मिश्रण के गुण

क्रम संख्या	गुण	नदी बालू	खनिज बालू	कृत्रिम बलू
1.	स्थायित्व, हब्बार्ड फील्ड (पौण्ड)	709	1262	2240
2.	रिक्ति %	27·4	18·2	14·6
3.	रिक्ति भरण, तारकोल द्वारा %	29·0	42·5	54·9
4.	बालू रिक्ति %	38·5	31·6	26·6
5.	भार प्रति घनपौण्ड फुट	112·8	122·6	132·7

इसके बाद दो प्रकार की बालुओं को इस प्रकार मिलाया गया ताकि रायफर के वर्गीकरण की पुष्टि हो सके। विभिन्न प्रकार की बालुओं के मिश्रण अनुपात इस प्रकार हैं :

खनिज बालू : नदी बालू	(30 : 70)
खनिज बालू : कृत्रिम बालू	(70 : 30)
कृत्रिम बालू : नदी बालू	(50 : 50)

अनुपात ज्ञात करने के पश्चात् इनमें विभिन्न मात्रा में डामर मिलाकर उपर्युक्त विधि से उनका रिक्ति तथा स्थायित्व ज्ञात किया गया (सारिणी 4)।

सारिणी 3

मिश्रित बालू का वर्गीकरण

चलनी नं०	कृत्रिम/खनिज बालू (30 : 70)	कृत्रिम/नदी बालू (50 : 50)	खनिज/नदी बालू (30 : 70)	रायफर
480	100	100	100	100
200	89	90	98	90-100
40	40	75	81	40-85
20	12	39	37	10-40
8	4	8	6	0-8

सारिणी 4

इष्टतम तारकोल पर मिश्रित बालू के गुण

क्रम सं०	गुण	कृत्रिम/खनिज बालू (30 : 70)	खनिज/नदी बालू (30 : 70)	कृत्रिम/नदी बालू (50 : 50)
1.	स्थायित्व, ह्व्वार्ड फील्ड पौण्ड	1628	2016	1785
2.	रिक्ति %	15·9	22·7	16·5
3.	रिक्ति भरण %, तारकोल द्वारा	47·2	36·4	48·1
4.	रिक्ति बालू में प्रतिशत	29·5	35·7	31·8
5.	भार प्रति घन फुट	126·6	117·9	126·0

विवेचना

सारिणी 1 से विदित होता है कि जहाँ नदी बालू एक ही आकार के कण वाली बालू है, खनिज बालू तथा कृत्रिम बालू वर्गीकृत बालू है परन्तु खनिज बालू रायफर के वर्गीकरण की उतनी तुष्टि नहीं करती जितनी कि कृत्रिम बालू। इसका प्रभाव सारिणी 2 में स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है। स्थायित्व मात्रा की तुलना से पता चलता है कि कृत्रिम बालू इन तीनों में सर्वोत्तम है और इसका प्रयोग बिना किसी परिवर्तन के निघर्षण स्तर पर किया जा सकता है। नदी बालू तथा खनिज बालू को संशोधित किये बिना प्रयोग में नहीं लाया जा सकता।

चूँकि प्रकृति में कृत्रिम बालू उतनी प्रचुरता से उपलब्ध नहीं है अतएव यदि अन्य दो प्राकृतिक बालुओं को मिश्रित करके उनको वर्गीकृत कर दिया जाय तो बिना किसी पूरक की आवश्यकता के उन्हें

निघर्षण स्तर के योग्य बनाया जा सकता है। सारिणी 3 में इस प्रकार के मिश्रण के अनुपात दिये गये हैं जो एक प्रकार से रायफर की निम्नतम तथा उच्चतम सीमा की तुष्टि करते हैं। सारिणी में मिश्रित बालू/डामर के गुण दिये गये हैं। इनमें खनिज बालू तथा नदी बालू मिश्रण को छोड़कर अन्य दो मिश्रण स्थायित्व तथा रिक्ति दोनों की तुष्टि करते हैं। खनिज बालू/नदी बालू मिश्रण में रिक्ति की मात्रा आवश्यकता से कुछ अधिक है परन्तु स्थायित्व आवश्यकता से काफी अधिक है अतएव इसे भी निघर्षण स्तर पर सफलतापूर्वक व्यवहार में लाया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, सड़क अनुसंधान संस्थान के निर्देशक के आभारी हैं जिन्होंने इस शोध पत्र को प्रकाशित कराने की अनुमति दी।

निर्देश

1. आलवनि रायफर, Highway Research Board Bulletin No. 188, Washington D.C.
2. स्वामी, एस० ए० तथा रत्नम, एस० वी०, Indian Roads Congress, Research Bulletin No. 9, 1964.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April 1974, Pages 137-142

G-फलनों से H-फलनों में रूपान्तरण

बी० एम० अग्रलाल तथा बी० एम० सिंहल
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—नवम्बर 14, 1973]

सारांश

इस शोधपत्र में G-फलनों का H-फलनों में रूपान्तरण सम्पन्न किया गया है।

Abstract

A transformation from G functions to 'H' functions. *By* B. M. Agarwal and B. M. Singhal, Mathematics Department, Government Science College, Gwalior.

In this paper a transformation from G' functions [1, p. 206] to 'H' functions [2, p. 408] has been obtained.

1. प्रस्तुत शोधपत्र में G-फलनों को H-फलनों में रूपान्तरित किया है। साथ ही इसके प्रयोग द्वारा हमने G-फलन वाले विख्यात समाकलों से H-फलन वाले कतिपय समाकल प्राप्त किये हैं।

2. $\{\underset{p}{\Delta}(ai, di); r\}$ को हम

$$\{\Delta(a_1, \alpha_1); r_1\}\{\Delta(a_2, \alpha_2); r_2\}, \ldots, \{\Delta(a_p, \alpha_p); r_p\}$$

के रूप में परिभाषित करते हैं जहाँ

$$\Delta(a_1, \alpha_1) = \frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_1+1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_1+\alpha_2-1}{\alpha_1}.$$

उपपत्ति ने निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता होगी जिन्हें लेगेंड्र द्विगुणन सूत्र [3 p. 26] द्वारा सरलता से सिद्ध किया जा सकता है।

$$\prod_{\gamma=1}^{\alpha i} \Gamma\left(\frac{a_i - \alpha_i s}{\alpha_i} + \frac{\gamma-1}{\alpha_i}\right) = (2\pi)^{1/2(\alpha i-1}(\alpha_i)^{1/2-ai+\alpha is}\Gamma(a_i - \alpha_i s). \tag{2·1}$$

$$\prod_{\gamma=1}^{\alpha i}\Gamma\left(1-\frac{a_i+\gamma-1}{\alpha_i}+s\right)=\prod_{\gamma=1}^{\alpha i}\Gamma\left(\frac{8-a_i+\alpha_i s}{c_i}+\frac{\gamma-1}{v_i}\right)$$

$$=(2\pi)^{1/2(\alpha i-1)}(\alpha_i)^{-1/2+ai-\alpha i s}\Gamma(1-a_i+\alpha_i s). \qquad (2\cdot2)$$

$$\Gamma(a_i-\alpha_i s)=(2\pi)^{-1/2(\beta i-1)}(\beta_i)^{-1/2-ai-\alpha is}\prod_{\gamma=1}^{\beta i}\Gamma\left(\frac{a_i-\alpha_i s}{\beta_i}+\frac{\gamma-1}{\beta_i}\right)$$

$$=(2\pi)^{-1/2)\beta i-1)}(\beta_i)^{-1/2+ai-\alpha is}\prod_{\gamma=1}^{\beta i}\Gamma\left(\frac{a_l+\gamma-1}{\beta_i}-\frac{\alpha_i s}{\beta_i}\right). \qquad (2\cdot3)$$

$$\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)=(2\pi)^{-1/2(\beta i-1)}(\beta_i)^{1/2-ab+\alpha is}\prod_{\gamma=1}^{\beta i}\Gamma\left(1-\frac{a_i+\alpha_i s}{\beta_i}+\frac{\gamma+1}{\beta_i}\right)$$

$$=(2\pi)^{-1/2(\beta i-1)}(\beta^i)^{1/2-ai+\alpha is}\prod_{\gamma=1}^{\beta i}\Gamma\left(1-\frac{a_i+\gamma-1}{\beta_i}+\frac{\alpha_i}{\beta_i}s\right).$$

3. G-फलन को हम [1 p. 206] के रूप में परिभाषित करते हैं :

$$G(x)=G^{\sum_1^m f_i \sum_1^n \alpha^i}_{\sum_1^p \alpha_i \sum_1^q f_i}\left[\xi x \middle| \begin{array}{l}\triangle(a_1,\alpha_1),\ \triangle(a_2\alpha_2),\ \ldots,\ \triangle(a_p,\alpha_p).\\ \triangle(b_1,f_1),\ \triangle(b_2,f_2),\ \ldots,\ \triangle(b_q,f_q).\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{m}\prod_{\gamma=1}^{f_i}\Gamma\left(\frac{b_i+\gamma-1}{f_i}-s\right)\prod_{i=1}^{n}\prod_{\gamma=1}^{\alpha i}\Gamma\left(1-\frac{c_i+\gamma-1}{\alpha_i}+s\right)}{\prod_{i=m+1}^{q}\prod_{\gamma=1}^{f_i}\Gamma\left(1-\frac{b_i+\gamma-1}{f_i}+s\right)\prod_{i=n+1}^{p}\prod_{\gamma=1}^{\alpha i}\Gamma\left(\frac{a_i+\gamma-1}{\alpha_i}-s\right)}\xi^s\,.\,x^s\,.\,ds$$

जहाँ
$$\xi=\prod_1^p\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\alpha i}\prod_1^q\left(\frac{e_i}{f_i}\right)^{fi}$$

अब (2·1) तथा (2·2) का उपयोग करने पर

$$G(x)=A\,.\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(b_i-f_i s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)}{\prod_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i+f_i s)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i-\alpha_i s)}\eta^s\,.\,x^s\,.\,ds,$$

जहाँ $$\eta = \prod_{1}^{q} (e_i)^{f_i} \prod_{1}^{p} (\beta_i)^{-\alpha_i},$$

$$A = (2\pi)^{1/2(\delta+p+q-2m-2n)} \prod_{1}^{q} (f_i)^{1/2-b_i} \prod_{1}^{p} (\alpha_i)^{a_i-1/2}$$

और $$\delta = \sum_{1}^{m} f_i - \sum_{m+1}^{q} f_i + \sum_{1}^{n} \alpha_i - \sum_{n+1}^{p} \alpha_i.$$

अब सूत्र (2·3) तथा (2·4) का प्रयोग करने पर

$$G(x) = K \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^{m} \prod_{\gamma=1}^{e_i} \Gamma\left(\frac{b_i+\gamma-1}{e_i} - \frac{f_i s}{e_i}\right) \prod_{i=1}^{n} \prod_{\gamma=1}^{\beta_i} \Gamma\left(1 - \frac{a_i+\gamma-1}{\beta_i} + \frac{\alpha_i}{\beta_i} s\right)}{\prod_{i=m+1}^{q} \prod_{\gamma=1}^{e_i} \Gamma\left(1 - \frac{b_i+\gamma-1}{e_i} + \frac{f_i s}{e_i}\right) \prod_{i=n+1}^{p} \prod_{\gamma=1}^{\beta_i} \Gamma\left(\frac{a_i+\gamma-1}{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} s\right)} x^s \cdot ds.$$

$$= K \cdot H_{\sum_1^p \beta_i,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i} \left[x \left| \begin{matrix} \left\{\triangle(a_i, \beta_i); \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\} \\ \\ \left\{\triangle(b_i, e_i);; \frac{f_i}{e_i}\right\} \end{matrix} \right. \right]$$

जहाँ

$$K = (2\pi)^{1/2\left(-\sum_1^m e_i + \sum_{m+1}^q e_i - \sum_1^n \beta_i + \sum_{n+1}^p \beta_i + \delta\right)} \times \prod_1^q \left(\frac{e_i}{f_i}\right)^{b_i-1/2} \prod_1^p \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^{a_i-1/2},$$

$$\sum_1^m f_i - \sum_{m+1}^q f_i + \sum_1^n \alpha_i - \sum_{n+1}^p \alpha_i \equiv \delta > 0 \tag{3·2}$$

तथा $$|\arg x| < \frac{\delta}{2}\pi. \tag{3·3}$$

अब हम उपर्युक्त रूपान्तरण की सहायता से H-फलन वाले कतिपय समाकल प्राप्त करेंगे।

निम्नांकित समाकलों की स्थापना की गई है :

$$\int_0^1 y^{-\sigma}(1-y)^{\sigma-\delta'-1} H_{\sum_1^p \beta_i,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i} \left[xy \left| \begin{matrix} \left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i); \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\} \\ \\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i); \frac{f_i}{e_i}\right\} \end{matrix} \right. \right] dy$$

$$=\Gamma(\sigma-\delta')\ H_{\sum_1^p \beta_i+1,\ \sum_1^0 e_i+1}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i+1}\left[x\left|\begin{matrix}(\sigma, 1),\ \left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i);\ \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i);\ \frac{f_i}{e_i}\right\},\ (\delta, 1)\end{matrix}\right.\right]. \tag{4·1}$$

(3·2), (3·3) तथा $Re\ \delta'<Re\ \sigma<Re\ b_h+1, h=1, \ldots, \sum_1^m f_i$. प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\sigma}\ H_{\sum_1^p \beta_i,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i}\left[xy\left|\begin{matrix}\left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i);\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i);\frac{f_i}{e_i}\right\}\end{matrix}\right.\right]dy$$

$$=H_{\sum_1^p \beta_i+1,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i+1}\left[x\left|\begin{matrix}(\sigma, 1),\ \left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i);\ \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i);\frac{f_i}{e_i}\right\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4·2}$$

(3·2), (3·3) तथा $Re\ \sigma<Re\ b_h+1\ h=1,\ldots, \sum_1^m f_i$ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$\int_0^\infty y^{-\sigma}\, J_v(2y^{1/2})\ H_{\sum_1^p \beta_i,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i}\left[xy\left|\begin{matrix}\left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i);\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i);\frac{f_i}{c_i}\right\}\end{matrix}\right.\right]dy$$

$$=H_{\sum_1^p \beta_i+2,\ \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i,\ \sum_1^n \beta_i+1}\left[x\left|\begin{matrix}\sigma-\frac{1}{2}v, 1, \left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i);\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\},\ (\sigma+\frac{1}{2}v, 1)\\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i);\frac{f_i}{e_i}\right\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4·3}$$

(3·2), (3·3) तथा $Re(-\sigma+\frac{1}{2}v+b_n)>-1,\ h=1,\ \ldots,\ \sum_1^m f_i$.

$Re(-\sigma-\alpha_j)<\frac{1}{4},\ j=1,\ \ldots,\ \sum_1^n \alpha_j$. प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$\int_0^\infty y^{-\sigma} K_v(2y^{1/2})\, H_{\sum_1^p \beta_i \;\; \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i \;\; \sum_1^n \beta_i}\left[xy \left| \begin{matrix} \left\{\underset{p}{\triangle}(a_i, \beta_i); \frac{a_i}{\beta_i}\right\} \\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i); \frac{f_i}{e_i}\right\} \end{matrix} \right. \right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2} H_{\sum_1^p \beta_i + 2 \;\; \sum_1^q e_i}^{\sum_1^m e_i \;\; \sum_1^n \beta_i + 2}\left(x \left| \begin{matrix} (\sigma - \tfrac{1}{2}v, 1), (\sigma + \tfrac{1}{2}v, 1), \left\{\triangle(a_i, \beta_i); \frac{a_i}{\beta_i}\right\} \\ \left\{\underset{q}{\triangle}(b_i, e_i); \frac{f_i}{e_i}\right\} \end{matrix} \right. \right) \qquad (4\cdot4)$$

(3·2), (3·3) तथा $Re(-\sigma \pm \frac{1}{2}v + b_h) > -1,\ h = 1, \ldots, \sum_1^m f_i$· प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

उपपत्ति :

समाकल [1, p. 214(5)] :

$$\int_0^1 y^{-\sigma}(1-y)^{\sigma-\delta'-1} G_{pq}^{mn}\left(xy \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right. \right) dy$$

$$= \Gamma(\sigma - \delta')\, G_{p+1\, q+1}^{m\; n+1}\left(x \left| \begin{matrix} \sigma, a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q, \delta' \end{matrix} \right. \right).$$

पर विचार करने पर उपर्युक्त समाकल निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है यदि प्राचल

$$K^{-1}\int_0^1 y^{-\sigma}(1-y)^{\sigma-\delta'-1}\, G_{\sum_1^p \alpha_i \;\; \sum_1^q f_i}^{\sum_1^m f_i \;\; \sum_1^n \alpha_i}\left[\xi xy \left| \begin{matrix} \{\underset{p}{\triangle}(a_i, \alpha_i); 1\} \\ \{\underset{q}{\triangle}(b_i, f_i); 1\} \end{matrix} \right. \right] dy$$

$$= K^{-1}\,\Gamma(\sigma - \delta')\, G_{\sum_1^p \alpha_i + 1 \;\; \sum_1^q f_i + 1}^{\sum_1^m f_i \;\; \sum_1^n \alpha_i + 1}\left[\xi x \left| \begin{matrix} \{\underset{p}{\triangle}(a_i, \alpha_i); 1\} \\ \{\underset{q}{\triangle}(b_i, f_i); 1\} \end{matrix} \right. \right]$$

में आवश्यक परिवर्तन कर दिये जायँ। अब रूपान्तर (3·1) का प्रयोग करने पर हमें (4·1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार ज्ञात समाकलों [1; p. 214(8), 214(9) 215(11)] की सहायता से अन्य उपर्युक्त समाकलों में निहित H-फलनों के स्वरूप सामान्य प्रकृति के न हो कर विशिष्ट प्रकार के होते हैं किन्तु एक बार H-फलन के किसी विशिष्ट रूप के लिये एक समाकल स्थापित हो जाने पर उसे अत्यन्त व्यापक

लक्षण के लिये सिद्ध किया जा सकता है। उदाहरणार्थ समाकल (4·1) को समाकलन क्रम में परिवर्तन लाकर निम्नांकित रूप में सिद्ध दिया जा सकता है :

$$\int_0^1 y^{-\sigma}(1-y)^{\sigma-\delta'-1}\, H_{p\,q}^{m\,n}\left[xy\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\ a_p\}\\ \{(b_q,f_q\}\end{matrix}\right] dy$$

$$=\Gamma(\sigma-\delta')\ H_{p+1\ \ q+1}^{m\ \ n+1}\left[x\middle|\begin{matrix}(\sigma,\ 1),\{(aa_p,\ a_p)\}\\ \{(b_q,f_i)\}\ (\delta',\ 1)\end{matrix}\right] \quad \ldots \quad (4\cdot5)$$

जहाँ $\sum_1^n (a_i)-\sum_{n+1}^p (a_i)+\sum_1^m (f_i)-\sum_{m+1}^q (f_i)\equiv\delta>0,$

$$|\arg x|<\tfrac{1}{2}\delta\pi$$

तथा $Re(\delta')<Re(\sigma)<Re\ b_h+1,\ h=1,\ \ldots,\ m.$

उपपत्ति :

सम्बन्ध (4·5) को सिद्ध करने के लिये बाँई ओर के H-फलन को मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के रूप में व्यक्त करते हुये तथा समाकलन के क्रम का विनिमय करने पर, जो इस प्रक्रिया में आये समाकल के परम अभिसारी होने के कारण वैध है, हमें निम्नांकित प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(b_i-f_i s)\ \prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i+a_i s)}{\prod_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i+f_i s)\ \prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i-a_i s)}\, x^s\int_0^1 y^{-\sigma+s}(1-y)^{\sigma-\delta'-1}\, ds\ .\ dy.$$

आन्तरिक समाकल को [1, p. 9(1), 9(5)] फलों की सहायता से निकालने तथा H-फलन की परिभाषा का उपयोग करने पर वांछित परिणाम मिलता है।

यह रूपान्तरण प्रदर्शित करता है कि संगत दशाओं के अन्तर्गत उनके प्राचलों के बदल देने मात्र से G-फलन वाले परिणाम H-फलन वाले परिणाम में रूपान्तरित किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions 1953, भाग 1, **मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क**
2. फाक्स, जी, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
3. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, 1967.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 2, April, 1974, Pages 143-153

2,4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन

एम० एम० म्हाला तथा सु० स० भाटवडेकर
रसायन अध्ययनशाला, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—जनवरी 2, 1974]

सारांश

इस शोध पत्र में 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के जल-अपघटन का, उभय प्रतिरोधी विलयनों में, पी-एच 0·2-7·46 परास में, 98° पर, अध्ययन किया गया। अध्ययन से विदित होता है कि, पी-एच 0·2-4·5 परास, में, एस्टर की उदासीन तथा एक-ऋणात्मक प्रजातियाँ क्रियाशील हैं। पी-एच 4·5-7·46 परास में जल-अपघटन की सम्पूर्ण दर एक-ऋणात्मकप्र जाति के कारण है क्योंकि द्वि-ऋणात्मक प्रजाति अक्रियाशील है। पी-एच लॉग-दर-परिच्छेदिका के उच्चिष्ट (पी-एच 4·5) एवं निम्निष्ठ (पी-एच 0·2) का परिमाणात्मक स्पष्टीकरण, क्रमशः क्रियाशील एक-ऋणात्मक एवं उदासीन प्रजातियों के आधार पर दिया गया है। अभिगृहीत वियोजन-स्थिरांक, pK के मान से ज्ञात की गई सैद्धांतिक दरें, प्रयोग में प्रेक्षित दरों से भलीभांति अनुकूल हैं। इस क्षेत्र में जलअपघटन एस्टर की उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजाति के फॉस्फोरस पर जल के द्विअणुक न्यूक्लिओफिलिक आक्रमण द्वारा होता है, जिसमें P—O बन्धन का विखंडन होता है। संभावित अभिक्रिया की क्रियाविधि को अधिक प्रामाणिक बनाने के लिये कई संकल्पनायें जैसे गतिज कोटि, आहेनिअस प्राचल, विलायक का प्रभाव एवं समगतिज संबंध आदि उपयोग में लाए गए हैं।

Abstract

Hydrolysis of 2, 4-dichlorophenyl dihydrogen phosphate in buffer solutions. *By* M. M. Mhala and S. S. Bhatawdekar, School of Studies in Chemistry, Jiwaji University, Gwalior.

Kinetics of hydrolysis of 2, 4-dichlorophenyl dihydrogen phosphate, in buffer solutions, has been investigated in the range pH 0·2-7·46, at 98°. A hydrolytic study shows that neutral and mononegative species of the ester are reactive in the

region pH 0·2-4·5. In the region pH 4·5-7·46, the overall rate of the hydrolysis is due to mononegative species, as the dinegative species have been found to be inert. Maximum (pH 4·5) and minimum (pH 0·2) of the pH log rate profile have been quantitatively explained on the basis of reactive species, mononegative and neutral respectively. The theoretical rates determined from assumed pK values agree well with the experimentally observed rates. The hydrolysis of the ester in this region proceeds with bimolecular nucleophilic attack of water on phosphorus of the reactive neutral and mononegative species involving P—O fission. The concepts such as kinetic order, Arrhenius parameters, solvent effect and iso-kinetic relationship have been used to give extra support to probable reaction mechanism.

प्रायः सभी मोनोफॉस्फेट एस्टर दर्शाते हैं कि लगभग पी-एच-4 पर, एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा होने वाले जल-अपघटन[1] की दर सबसे अधिक रहती है। पी-एच-4·0 से उच्च एवं निम्न पी-एच मान पर अभिक्रिया की दरों में ह्रास का कारण क्रमशः कम क्रियाशील द्वि-ऋणात्मक एवं उदासीन प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन का होना बताया गया। साधारणतया ऐरिल फॉस्फेटों में, ऐल्किल फॉस्फेटों के विपरीत, अनुमानित अनुनाद स्थायीकृत फीनॉक्साइड आयन बनने के कारण P—O बन्धन विखंडित होता है।

अभी तक 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन के संबंधित गतिज आँकड़े उपलब्ध नहीं हैं। औद्योगिक दृष्टि से महत्वपूर्ण[2], 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का अध्ययन इसलिये आरम्भ किया गया कि एस्टर की फॉस्फेट पार्श्व शृंखला के आर्थो और पैरा-स्थिति के हाइड्रोजन परमाणुओं को क्लोरीन परमाणुओं द्वारा प्रतिस्थापित करने पर न केवल उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन की दर पर प्रभाव पड़ेगा परंतु नये अभिक्रिया पथ सम्बद्ध होने की संभावना है।

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं विधियां

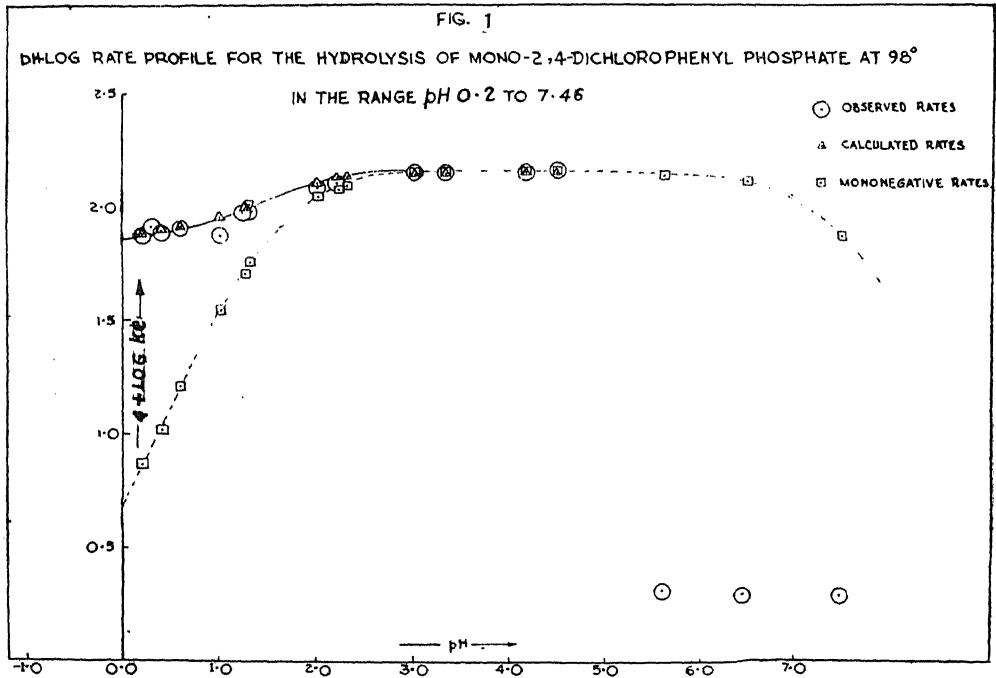
2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट को मगौरी तथा शॉ[2] की विधि द्वारा बनाया एवं शुद्ध[3] किया गया।

प्रक्रिया

2,4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट ($5{\cdot}0 \times 10^{-4}$ M नहीं तो अन्यथा निर्दिष्ट) का उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन पीएच 0·2-7·46 परास में, $98° \pm 0{\cdot}05°$ से० पर किया गया। इस अध्ययन में एलन की विधि[4] का उपयोग करके अकार्बनिक फॉस्फेट का वर्णमापी आकलन[3] किया गया।

गतिज मापन में, ऐसे उभय प्रतिरोधी विलयनों को उपयोग में लाया गया जिनके लिये स्टेने[5] ने 20° एवं 150° पर पी-एच के मान दिये हैं। जिस प्रकार डाइमेथिल फॉस्फेट के अध्ययन में उभय प्रतिरोधी विलयनों के लिये अंतर्वेशित पी-एच के मान को उपयोग में लाया गया था, उसी प्रकार इस अध्ययन में इन उभय प्रतिरोधी विलयनों के लिये, माध्यमिक ताप, 98° पर, अंतर्वेशित पी-एच के मान को उपयोग में लाया गया। डाइ-ऑक्सैन को शुद्ध एवं शुष्क[7] किया गया। अन्य रासायनिक पदार्थ बी० डी० एच० एवं रीडल श्रेणी के उपयोग में लाये गये।

विवेचना

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट का उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल अपघटन पी-एच 0·2-7·46 परास में 98° पर किया गया। पी-एच लॉग-दर-परिच्छेदिका (चित्र 1) स्पष्ट रूप से

चित्र 1

दर्शाती है कि पी-एच 0·2 से 4·5 तक दर स्थिरांकों में वृद्धि एवं इसके पश्चात् पी-एच 7·46 तक दर स्थिरांकों में एकदम ह्रास होता है। पी-एच लॉग-दर-परिच्छेदिका के पी-एच 0·0-0·5 में निम्निष्ठ एवं लगभग 4 के निकट उच्चिष्ट कई मोनोऐरिल फॉस्फेटों[1] के जल-अपघटन में प्रेक्षित हुआ, जिसका कारण जल-अपघटन का क्रमशः उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा होना बताया गया। चित्र 1 दर्शाता है कि पी-एच मान में 0·2 से 4·5 तक वृद्धि के साथ जल-अपघटन की दरों में रेखीय त्वरण, जिसका ढाल

लगभग 1·0 है, क्रियाशील एक-ऋणात्मक प्रजाति के अचानक प्रविष्ट होने से होता है। पी-एच 4·5 पर उच्चिष्ट का कारण क्रियाशील एक-ऋणात्मक प्रजाति के अधिकतम प्रतिशत (लगभग 100%) का होना है। इसीलिये पी-एच 4·5 के प्रेक्षित दर को ही एक-ऋणात्मक प्रजाति का विशिष्ट दर (k_{M0}=14·74×10⁻³ min.⁻¹) माना जा सकता है। निम्निष्ठ, पी-एच 0·2 पर, केवल उदासीन प्रजाति उपस्थित रहती है और एक-ऋणात्मक प्रजाति का सान्द्रण लगभग शून्य रहता है। इसीलिये पी-एच 0·2 की प्रेक्षित दर को ही उदासीन प्रजातियों की विशिष्ट दर ($k_{M0}=7\cdot36\times10^{-3}$ min.⁻¹) माना जा सकता है। विशिष्ट उदासीन दरें ($k_{N0}=7\cdot36\times10^{-3}$ min.⁻¹) आयनिक तीव्रता के आंकड़ों के आधार पर ज्ञात की गई विशिष्ट उदासीन दर[3] (7.39×10^{-3} min.⁻¹) सर्वथा अनुकूल है। उच्चिष्ठ के पश्चात्, दर में ह्रास, एक-ऋणात्मक प्रजाति के सान्द्रण में ह्रास के अनुक्रमानुपाती है। इस पी-एच 4·5-7·46 परास में एक-ऋणात्मक प्रजाति के सान्द्रण में ह्रास का कारण उसका अक्रियाशील द्वि-ऋणात्मक प्रजाति[8] में रूपांतरण हो जाना है।

सारणी 1

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के, 98° पर, उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन के, वियोजन स्थिरांक pK_1 तथा pK_2 के मान के आधार पर ज्ञात की गई सैद्धांतिक दर एवं प्रयोग में प्रेक्षित दर

पी-एच	$N/_{M+N}$	$k_N\times10^4$ मिनट⁻¹	M_{M+N}	$k_M\times10^4$ मिनट⁻¹	दर $k_e\times10^4$ मिनट⁻¹ परिकलित	प्रेक्षित
0·2	0·95	69·92	0·05	7·37	77·29	73·57*
0·4	0·93	68·45	0·07	10·32	78·77	76·43*
0·6	0·89	65·50	0·11	16·22	81·72	79·43*
1·0	0·76	55·94	0·24	35·38	91·32	75·70
1·24	0·65	47·84	0·35	51·60	99·44	96·30
1·3	0·61	44·90	0·39	57·50	102·4	94·90
2·0	0·24	17·66	0·76	112·05	129·7	121·9
2·2	0·17	12·51	0·83	122·37	134·9	127·6
2·3	0·14	10·30	0·86	126·79	137·1	139·5
3·0	0·03	2·21	0·97	141·01	143·2	143·3
3·33	0·02	1·47	0·98	144·48	146·0	146·1
4·17	0·01	0·74	0·99	145·96	146·7	147·4
4·5	0·00	0·00	1·00	147·43	147·4	147·4*
5·6†	—	—	0·99	145·96	—	2·10
6·43†	—	—	0·92	135·64	—	2·00
7·46†	—	—	0·53	78·14	—	2·00

टिप्पणी *आलेखित मान।

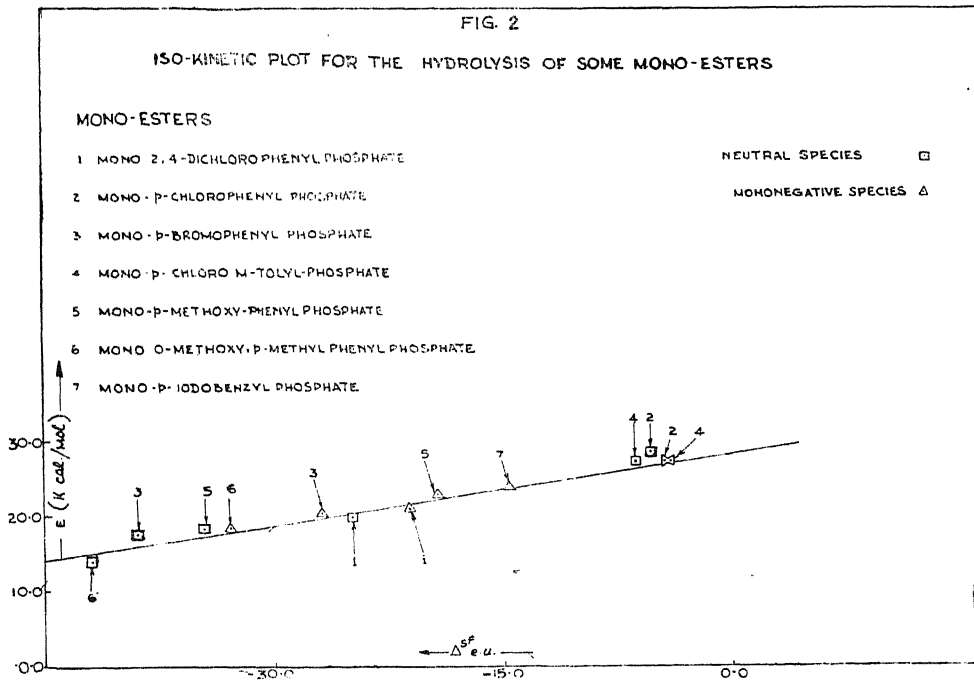
†इस पी-एच पर प्रजाति के प्रभाज एवं दर स्थिरांक क्रमशः $M/_{M+N}$ एवं k_M के कारण हैं।

सैद्धांतिक दरें निम्न समीकरण द्वारा परिकलित की जा सकती हैं।

$$k_e = k_N + k_M \tag{1}$$

जहां, k_e, k_N एवं k_M क्रमशः क्रिया का दर गुणांक, उदासीन दर गुणांक एवं एक-ऋणात्मक दर गुणांक हैं। समीकरण (1) को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं

$$k_e = k_{N0} \cdot \frac{N}{M+N} + \mathrm{k_{Mo}} \cdot \frac{M}{N+M} \tag{2}$$

जहां k_{N0} एवं $\mathrm{k_{Mo}}$ क्रमशः विशिष्ट उदासीन एवं विशिष्ट एक-ऋणात्मक दर, एवं $N/M+N$ और $M/N+M$ क्रमशः उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजाति के प्रभाज हैं। जिस प्रकार डाइमेथिल फॉस्फेट[6] में, पीएच 0-8·04 परास में, क्रियाशील प्रजाति के प्रभाजों का आकलन pK_1 और pK_2 के मानों से किया गया, उसी प्रकार इस अध्ययन में भी क्रियाशील प्रजातियों के प्रभाज अभिगृहीत वियोजन स्थिरांक pK के मान से आकलित (सारणी 1) किये गये हैं। विशिष्ट उदासीन एवं विशिष्ट एक-ऋणात्मक दर स्थिरांकों के आधार पर उदासीन प्रजाति की एक ऋणात्मक प्रजाति में एवं एक-ऋणात्मक

चित्र 2

प्रजाति की द्वि-ऋणात्मक प्रजाति में वियोजन हेतु क्रमशः pK_1 (1·5) एवं pK_2 (7·51) के मान परिकलित किये गये। चित्र 1, पी-एच 0·2-3·0 तक, प्रेक्षित एवं सैद्धांतिक एक-ऋणात्मक दरों में विचलन दर्शाता

है। इस क्षेत्र में दरों का परिकलन निम्न समीकरण द्वारा करने पर, परिकलित दर प्रयोग में प्रेक्षित दरों से भलीभांति अनुकूल दिखते हैं (सारणी 1)

$$k_e = 14{\cdot}74 \times 10^{-3}\ \text{min.}^{-1} \times M/N_{+M} + 7{\cdot}36 \times 10^{-3}\ \text{min.}^{-1} \times N/_{N+M} \qquad (3)$$

पी-एच 0·2-3·0 परास में प्रेक्षित विचलन जल अपघटन की सम्पूर्ण दर में उदासीन प्रजाति के योगदान के कारण है। पी-एच 4·5-7·46 परास में प्रेक्षित दर परिकलित दरों से बहुत ही कम है इसलिये प्रेक्षित दरों को स्थूल दर समझते हैं जिसका कारण द्वि-ऋणात्मक प्रजाति के अक्रियाशील[9, 10] होने से उनका जल-प्रपघटन की सम्पूर्ण दर में योगदान का अभाव है।

उच्च-ऋणात्मक ऐन्ट्रॉपी एवं तुलना में संक्रियण-ऊर्जा के मान अभिक्रिया के द्विआणविकता के स्वभाव को दर्शाते हैं। 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन की क्रियाविधि ज्ञात करने के लिये पी-एच 1·0 तथा तथा 4·17 में 80°, 90°, 98° पर आर्हेनियस प्राचल ज्ञात किये गये (सारणी 2)। ये परिणाम उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा होने वाले जल-अपघटन के द्वि-आणविक स्वभाव[9] की पुष्टि करते हैं।

सारणी 2

2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन के लिये ज्ञात किये गये आर्हेनियस के प्राचल

	प्राचल		
उभय प्रतिरोधी माध्यम पी-एच	संक्रियण ऊर्जा "E" कि कैलोरी/मोल	आवृति घटक 'A' (सेकंड$^{-1}$)	ऐन्ट्रॉपी $\triangle S^*$ e.u.
1·0	19·9	$8{\cdot}3 \times 10^7$	−25·0
4·17	20·9	$4{\cdot}8 \times 10^8$	−21·2

संक्रमण अवस्था का स्वभाव ज्ञात करने के लिये ह्यूजेस तथा इनगोल्ड[11, 12] के विलायक के प्रभाव संबंधी सिद्धांतों को उपयोग में लाया गया। 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट की उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजाति द्वारा जल-अपघटन की संक्रमण अवस्था का स्वभाव ज्ञात करने के लिये क्रमशः पी-एच 1·0 तथा 4.17 पर अध्ययन किया गया, लेकिन प्रथम पी-एच पर प्रजाति के प्रभाजों का परिकलन करने पर ऐसा विदित हुआ कि इस पी-एच पर उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियाँ दोनों ही क्रियाशील हैं। इन दोनों क्रियाशील प्रजातियों द्वारा होने वाले जल-अपघटन पर विलायक का प्रभाव संभवतः प्रतिसंतुलित हो जाने से अल्पतर दिखता है (सारणी 3)। पी-एच 4·17 पर, जल के अणु एवं एक-ऋणात्मक प्रजाति से बनी संक्रमण अवस्था में ऋणात्मक

आवेश का प्रकीर्णन होता है। इसीलिये आयनकारी शक्ति में ह्रास के साथ दर में वृद्धि (सारणी 3) दिखाई देती है।

सारणी 3

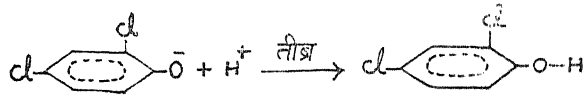
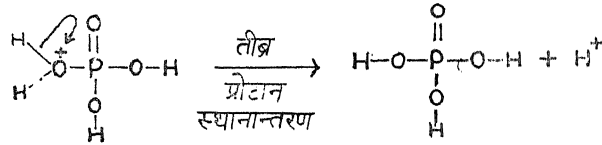
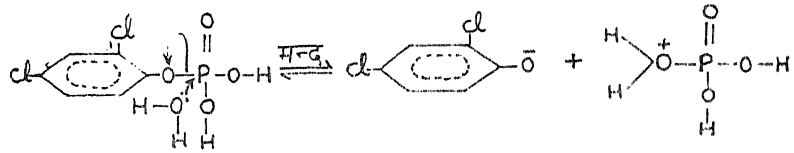
2, 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट के उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन पर विलायक का प्रभाव (98°)

उभय प्रतिरोधी माध्यम पी-एच	उपयोग में लाये डाइऑक्सेन का प्रतिशत (विलायक) (V/V)	10^3 ke (मिनट$^{-1}$)
1·0	0·0	7·57
1·0	10·0	5·88
1·0	30·0	6·95
1·0	50·0	7·87
4·17	10·0	11·19
4·17	30·0	15·77
4·17	50·0	18·22

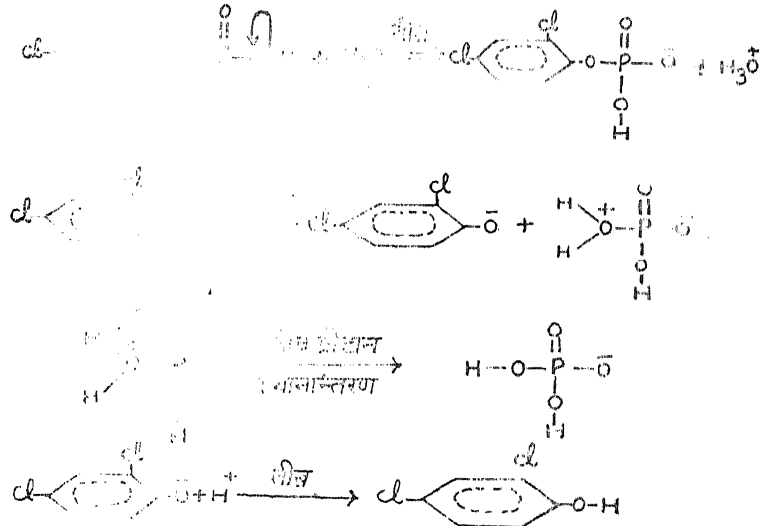
फेनिल ऑर्थोफॉस्फेटों[13] में P-O बन्धन का विखंडन, अनुनाद स्थायीकृत फीनाक्साइड आयन बनने के कारण प्रेक्षित हुआ। इसी प्रकार के बन्धन का विखंडन *p*-टॉलिल एवं *p*-नाइट्रोफेनिल फॉस्फेटों[14] में भी अनुमानित किया गया। मोनोऐरिल फॉस्फेट एस्टरों की उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन में प्रेक्षित गतिज आँकड़े सारणी 4 में संक्षेपित किये गये हैं। समरूप गतिज आंकड़े 2 4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फास्फेट की उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन में प्रेक्षित हुए। इसीलिये P-O बन्धन के विखंडन का अनुमान लगाया गया। उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन की संभावित क्रियाविधि को क्रमश: आरेख 1 और 2 में दर्शाये अनुसार प्रस्तावित किया जा सकता है।

मन्द

तीव्र प्रोटान स्थानान्तरण

तीव्र

आरेख-1 2,4-डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट की उदासीन प्रजाति के फॉस्फोरस पर, जल के द्वि-अणुक न्युक्लिओफिलिक आक्रमण द्वारा उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन

प्रोटान स्थानान्तरण

तीव्र

आरेख-2 2,4 -डाइक्लोरोफेनिल डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट की एक-ऋणात्मक प्राजाति के फॉस्फोरस पर, जल के द्वि-अणुक न्युक्लिओफिलिक आक्रमण द्वारा उभय प्रतिरोधी विलयनों में जल-अपघटन

एक ऋणात्मक प्रजाति द्वारा जल-अपघटन को ऐसे भी निरूपित किया जा सकता है जिसमें हाइड्रोजन बंधनीय संकर जल के साथ बनते हों[14]।

अभिक्रिया की संभावित क्रियाविधि को समगतिज संबंध द्वारा पुनः अनुमोदित किया है। आरेख-2 में मोनो 2, 4-डाइक्लोरोफेनिल फॉस्फेट का बिन्दु, P-O बन्धन द्वारा विखंडित होने वाले अन्य एस्टर की तरह रेखाकार वक्र के समीप आता है जिससे क्रियाविधि का अनुमोदन होता है।

सारणी 4

फेनिल फॉस्फेट मोनोएस्टरों के उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों द्वारा जल-अपघटन के लिये तुलनात्मक गतिज प्राचल

फॉस्फेट एस्टर	माध्यम	10^5 k_N (सेकंड$^{-1}$) (ताप)	10^5 k_M (सेकंड$^{-1}$) (ताप)	"E" कि कैलोरी/मोल	'A' (सेकंड$^{-1}$)	Δ^{s*} e.u.	विखंडन	आणविकता	निर्देश
2, 4-डाइक्लोरोफेनिल—	0·1M HCl 4·17 पीएच	12·31 (98°) k_{No}	— 24·57 k_{Mo} (91°)	19·9 20·9	$8·3 \times 10^7$ $4·8 \times 10^8$	—25·0 —21·2	P—0*	2	यह लेख
p-नाइट्रोफेनिल—	— 4·17 पीएच	30·0 (100°) —	— 19·9 (100°)	— 29·7	— $2·5 \times 10^{13}$	— —	P—0	—	14
p-बेंज़िलऑक्सीफेनिल—	3·0M HCl 4·17 पीएच	1·52 (99°) —	— 15·3 (99°)	21·38 29·33	$1·75 \times 10^7$ $1·2 \times 10^9$	—23·17 —19·5	P—0*	2	15
2,3-डाइमेथॉक्सी फेनिल—	0·5M HCl 4·17 पीएच	2 33 (98°) —	— 14·6 (98°) k_{Mo}	22·2 —	$7·98 \times 10^8$ —	—23·27 —	P—0*	2	10
p-क्लोरो *m*—टोलिल—	1·0M HCl 4·17 पीएच	4·61 (98°) —	— 2·52 (80°)	27·46 27·46	$7·68 \times 10^{12}$ $2·38 \times 10^{12}$	—6·48 —4·2	P—0*	2	16
p-क्लोरोफेनिल—	0·1M HCl 4·17 पीएच	5·53 (98°) —	— 2·27 (80°)	28·46 27·46	$3·58 \times 10^{12}$ $2·27 \times 10^{12}$	—5·57 —4·42	P—0*	2	17

सारणी 4 (क्रमशः)

फॉस्फेट एस्टर	माध्यम	10^5 k_N (सेकंड$^{-1}$) (ताप)	10^5 k_M (सेकंड$^{-1}$) (ताप)	"E" K कैलोरी/मोल	'A' (सेकंड$^{-1}$)	Δ^{S*} e.u.	विखंडन	आणविकता	निर्देश
o-मेथॉक्सी *p*-मेथिल फेनिल—	0·1M HCl	1·90 (88°)	—	14·14	$1{\cdot}33\times10^4$	—41·9	P—0*	2	18
	4·17 पीएच	—	11·0 (98°)	18·7	$1{\cdot}2\times10^6$	—33·0			
p-ब्रोमोफेनिल—	—	3·76	—	17·4	—	—38·94	P—0*	2	19
	4·17 पीएच	(98°) —	9·04 (98°)	20·6	$9{\cdot}5\times10^9$	—26·92			
p-मेथॉक्सी फेनिल—	3·0M HCl	1·96 (99°)	—	18·38	$7{\cdot}2\times10^8$	—34·83	P—0*	2	9
	4·17 पीएच	—	8·35 (99°)	22·89	$2{\cdot}69\times10^9$	—19·40			
फेनिल—	—	3·05	—	—	—	—	P—0	—	13
	4·17 पीएच	(100°) k_{No} —	3·5 (100°)	29·0	$18{\cdot}0\times10^{12}$	—0·9			
p-टोलिल—	—	2·4	—	—	—	—	P—0	—	14
	4·17 पीएच	(100°) —	2·8 (100°)	29·0	$21{\cdot}0\times10^{12}$	—0·002			
मेथिल—	—	0·05	—	—	—		C—0	—	20
	4·17 पीएच	(100°) —	0·823 (10°0)	30·6	$6{\cdot}5\times10^{12}$	—			

टिप्पणी— k_N एवं k_M क्रमशः मोनो एस्टर की उदासीन एवं एक-ऋणात्मक प्रजातियों की दरों को दर्शाते हैं ।
*कल्पित विखंडन ।

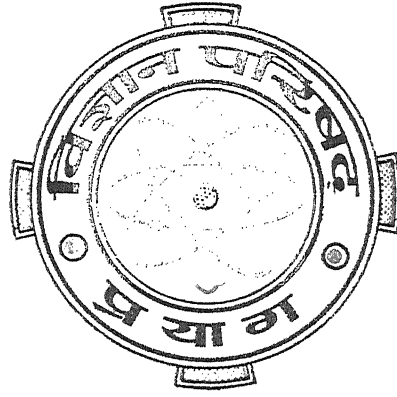
निर्देश

1. वर्नेन, सी० ए०, Special publication No. 8 (The Chemical Society, London), 1957
2. मगौरी, एम० एच० तथा शाँ, जी०, **जर्नं० केमि० सोसा०**, 1953, 1479-82.
3. भाटवडेकर, एस० एस०, **शोध प्रबन्ध**, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर, 1972
4. एलन, आर० जे० एल०, **बायोकेमि० जर्नं०**, 1940, **34**, 858.
5. स्टेने, एस०; Recl. Trav. Chim. Pays-Bas Belg., 1930, **49**, 1133.
6. बंटन, सी० ए०, म्हाला, एम० एम०, ओल्ढाम, के० जी० तथा **वर्नेन**, सी० ए०, **जर्नं० केमि० सोसा०**, 1960, 3293
7. हेस, के० तथा फ्राह्म, एच०, Ber. dt. Chem. Ges., 1938, **71**, 2627.
8. कॉक्स, जे० आर० (ज्यू०) तथा रामसे, ओ० बी०, **केमि० रिव्यू**, 1964, **64**, 317.
9. म्हाला, एम० एम०, (मिस) होला, सी० पी,० (मिसेस) कस्तूरी, तथा (मिस) गुप्ता, के०, **इंडियन जर्नं० केमि०**, 1970, **8**, 51-56.
10. म्हाला, एम० एम०, तथा शशीप्रभा, **इंडियन जर्नं० केमि०**, 1970, **8**, 972-76
11. ह्यूजेस, ई० डी० तथा इनगोल्ड, सी० के०, **जर्नं० केमि० सोसा०**, 1935, 244.
12. कूपर के० ए०, धर, एम० एल०, ह्यूजेस, ई० डी०, इनगोल्ड, सी० के०, मेकनलटी, बी० जे० तथा वुल्फ, एल० आय०, **जर्नं० केमि० सोसा०**, 1948. 2043.
13. बर्नार्ड, पी० डब्ल्यू० सी०, बंटन, सी० ए०, लिलवैलिन, आर०, ओल्ढाम, के० जी०, सिल्वर, वी० एल० एवं वर्नेन, सी० ए०, **कैम० एन्ड इंड०**, 1955, 760-763.
14. बर्नार्ड, पी० डब्ल्यू० सी०, बंटन, सी० ए०, कैलरमन, डी०, म्हाला, एम० एम०, सिल्वर, बी० एल०, वनन, सी० ए० एवं बैल्य, वी० ए०, **जर्नं० केमि० सोसा०** 1966, 227-235.
15. बोकिल, एम० के०, शोध प्रबंध, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर, 1970
16. पटवर्धन, एम० डी०, शोध प्रबंध, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर, 1968
17. म्हाला, एम० एम०, पटवर्धन, एम० डी० तथा कस्तूरी, जी०, **इंडियन जर्नं० केमि०** 1969, **7**, 149
18. कदमाने, वी० बी०, शोध प्रबन्ध, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर (1971)
19. कस्तूरी, जी०, शोध प्रबन्ध, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर (1969)
20. ओल्ढाम, के० जी०, शोध प्रबन्ध, लंडन (1957)

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 17	जुलाई 1971	संख्या 3

विषय-सूची

Vijnana P ̥arishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July 1974, Pages 155-164

$\overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ के लिए परिमित प्रसार

इन्दिरा अग्रवाल तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 4, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में $\overset{*}{A}$-फलन के लिये प्राचलों का उपयुक्त चुनाव करते हुये पाँच परिमित प्रसार प्राप्त किये गये हैं। शर्मा के $S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, फाक्स के $H(x)$, माइजर के $G(x)$ तथा हाइपरज्यामितीय फलनों के परिमित प्रसारों को विशिष्ट दशाओं के रूप में अंकित किया गया है।

Abstract

On finite expansions for $\overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *By* Indira Aggarwala and A. N. Goyai, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper five finite expansions for the $\overset{*}{A}$-function have been established with proper choice of parameters. Finite expansions for Sharma $S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, Fox $H(x)$, Meijer $G(x)$ and hypergeometric functions have been recorded as special cases.

1. विषय प्रवेश

चतुर्वेदी तथा गोयल[1] ने $\overset{*}{A}$ फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$\overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \overset{*}{A}{}^{m_1, 0 : m_2, n_2 : m_3, n_3}_{p_1, q_1 : p_2, q_2 : p_3, q_3}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} [((a_{p_1}, \alpha_{p_1})); ((b_{q_1}, \beta_{q_1}))]$$

$$\{((c_{p_2}, \gamma_{p_2})); ((d_{q_2}, \delta_{q_2}))\} : \{((e_{p_3}, \lambda_{p_3})); ((f_{q_3}, \mu_{q_3}))\}\Big]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s+t) \,.\, \psi(s, t) \,.\, x^s y^t \,.\, ds \,.\, dt \tag{1·0}$$

जहाँ $$\phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(a_j+a_js+a_jt)}{\prod_{j=1+m_1}^{p_1}\Gamma(1-a_j-a_js-a_jt)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(b_j+\beta_js+\beta_jt)}$$

तथा $$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_js)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_js)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(1-e_j+\lambda_jt)\prod_{j=1}^{n_3}(f_j-\mu_jt)}{\prod_{j=1+m_2}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_js)\prod_{j=1+n_2}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_js)\prod_{j=1+m_3}^{p_3}\Gamma(e_j-\lambda_jt)\prod_{j=1+n_3}^{q_3}\Gamma(1-f_j+\mu_jt)}$$

यही नहीं $$((a_{p_1}, a_{p_1}))=(a, a_1), (a_2, a_2)\ldots(a_{p_1}, a_{p_1}).$$

इससे भी आगे $\alpha's, \beta's, \gamma's, \delta's, \lambda's,$ तथा $\mu's$ सभी धनात्मक हैं। L_1 तथा L_2 कंटूर हैं जो क्रमश: s तथा t तल में हैं और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक प्रसरित हैं और आवश्यकता हुई तो $\Gamma(d_j-\delta_js), j=1, 2, \ldots n_2$ तथा $\Gamma(f_j-\mu_jt), j=1, 2, \ldots n_2$ के पोल क्रमश: L_1 तथा L_2 कंटूरों के दाईं ओर स्थित रह सकते हैं। $\Gamma(1-c_j+\gamma_js), j=1, 2, \ldots m_2$; $\Gamma(a_j+a_js+a_jt), j=1, 2, \ldots m_1$ तथा $\Gamma(1-e_j+\lambda_jt), j=1, 2, \ldots m_3$ के पोल क्रमश: L_1 तथा L_2 कंटूरों के बाईं ओर स्थित रहते हैं। धन पूर्णांक $p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3, n_2, n_3$ द्वारा निम्नांकित असमिकाओं की तुष्टि होती है :

$$q_2, q_3\geqslant 1; p_1, q_1\geqslant 0; 0\leqslant m_1, m_2, m_3, n_2, n_3\leqslant p_1, p_3, q_2,$$
$$q_3\; p_1+p_2\leqslant q_1+q_2; p_1+p_3\leqslant q_1+q_3.$$

जहाँ $0\leqslant m_1, m_2\ldots n_3\leqslant p_1, p_2\ldots q_3$ का अर्थ होता है $0\leqslant m_1\leqslant p_1$; $0\leqslant m_2\leqslant p_2\ldots$ इत्यादि असमिकायें तथा $a_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \lambda_j, \mu_j$ में सबसे बड़ी $a, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ है। $x=0$ तथा $y=0$ मान सम्मिलित नहीं किये गये हैं।

परिभाषित $\overset{*}{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ x तथा y का वैश्लेषिक फलन है, यदि

$$|\arg x|<\left(\omega_1-\frac{\tilde{\omega}_1}{2}\right)\pi; 2\omega_1>\omega_1 \tag{1·1}$$

$$|\arg y|<\left(\omega_2-\frac{\tilde{\omega}_2}{2}\right)x; 2\omega_2>\tilde{\omega}_2 \tag{1·2}$$

जहाँ $$\omega_1=m_1a+m_2\gamma+n_2\delta; \omega_2=m_1a+m_3\lambda+n_3\mu.$$
$$\tilde{\omega}_1=p_1a+p_2\gamma+q_2\delta+q_1\beta; \tilde{\omega}_2=p_1+p_3\lambda+q_3\mu+q_1\beta.$$

निम्नांकित $\overset{*}{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ में (1·0) से भिन्न प्राचल हैं। अर्थात्

$$\overset{*}{A}{}^{m_1,\, 0\,:\, m_2,\, n_2\,:\, m_3,\, n_3}_{p_1,\, q_1\,:\, p_2,\, q_2\,:\, p_3,\, q_3}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Big|\; [((a_j, a_j))_{1}, {}_{p_1}; ((b_j, \beta_j))_{1}, {}_{q}]\;\cdot\Big\{\Big(c_1+\frac{k_i}{2}, \gamma_1\Big),$$

$$\left(-c_1-1-\frac{k}{2}, \gamma_1\right), ((c_j, \gamma_j))_{3, p_2}; ((d_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2}+\frac{k}{2}-1, \gamma_1\right)\Big\}:$$

$$\{(e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1}, (e_1+\beta-k_1-1, \lambda_1); (e_1+\alpha+\beta-k_1-2, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_{2, q_3}\}\Big]$$

को निम्न प्रकार से लिखा जावेगा

$$\overset{*}{A}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| [((a_j, \alpha))_{1, p_1}; ((b_j, \beta_j))_{1, q_1}] : \Big\{ c_1+\frac{k}{2}, \gamma_1\Big), \left(-c_1-1-\frac{k}{2}, \gamma_1\right),$$

$$((c_j, \gamma_j))_{3, p_2}; ((d_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2}+\frac{k}{2}-1, \gamma_1\right)\Big\} : \{((e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1},$$

$$(e_1+\beta-k_1-1, \lambda_1); (e_1+\alpha+\beta-k_1-2, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_{2, q_3}\}\Big]$$

जहाँ $(d_1, \delta_1), (d_2, \delta_2)\ldots, (d_{q_2-1}, \delta_{q_2-1})$. के लिये $((d_j, \delta_j))_{1, q_2-1}$ व्यवहृत है।

फलन $\overset{*}{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ में शर्मा[2] का, $S\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, अग्रवाल[3] का $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, गुप्ता[4] द्वारा उपयुक्त विधि से प्रदर्शित फाक्स का H-फलन, बहु ज्ञात माइजर का G-फलन तथा फलस्वरूप विशिष्ट दशाओं के रूप में अन्य कई फलन निहित हैं।

2. हमें जिन मुख्य फलों को सिद्ध करना है, वे हैं :

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{r_1=0}^{k} {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}\, x^r y^{r_1}(1+c_1-d_{q_2})_r(1-\alpha)_{r_1}$$

$$\overset{*}{A}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| [(a_j+r\alpha_j+r_1\alpha_j, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j+r\beta_j+r_1\beta_j, \beta_j))_{1, q_1}\Big] :$$

$$\Big\{c_1-\frac{k}{2}+r-r\gamma_1, \gamma_1\Big), \left(-c_1-\frac{k}{2}-1-r\gamma_1, \gamma_1\right), ((c_j-r\gamma_j, \gamma_j))_{3, p_2};$$

$$((d_j-r\delta_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2}-1-\frac{k}{2}-r\gamma_1, \gamma_1\right)\Big\} : \{((e_j-r_1\lambda_j, \lambda_j))_{1, p_3-1},$$

$$(e_1+\beta-1-r_1\lambda_1, \lambda_1); (e_1+\alpha+\beta-r_1-2-r_1\lambda_1, \lambda_1), ((f_j-r_1\mu_j, \mu_j))_{2, q_3}\}\Big]$$

$$=\overset{*}{A}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| [((a_j, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j, \beta_j))_{1, q_1}\Big] : \Big\{\Big(c_1+\frac{k}{2}, \gamma_1\Big), \left(-c_1-1-\frac{k}{2}, \gamma_1\right),$$

$$((c_j, \gamma_j))_{3, p_2}; ((d_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2}+\frac{k}{2}-1, \gamma_1\right)\Big\} : \{((e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1},$$

$$(e_1+\beta-k_1-1, \lambda_1); (e_1+\alpha+\beta-k_1-2, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_{2, q_3}\}\Big] \qquad (2\cdot0)$$

जहाँ $p_2 \geqslant m_2 \geqslant 2; p_3 > m_3 \geqslant 0; Re\left(c_1 - \frac{k}{2} - \gamma_1 s\right) \neq 0, -1, -2 \ldots, (k-1)$

$q_2 \geqslant 1 \quad ; q_3 \geqslant n_3 \geqslant 1; Re\,(3 - e_1 - \alpha - \beta - \lambda_1 t) \neq 0, -1 - 2 \ldots, (k_1 - 1)$

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} \frac{\Gamma(c-\beta-r)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-r_1)\Gamma(c-\beta-k)}\; {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}\, (-1)^{k_1}(-y)^{-r_1} x^r$$

$$\overset{*}{A}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [((a_j + r\alpha_j - r_1\alpha_j, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j + r\beta_j - r_1\beta_j, \beta_j))_{1, q_1}] :$$

$$\{((c_j - r\gamma_j, \gamma_j))_{1, p_2-1}, (c_1 + c - 1 - r\gamma_1, \gamma_1); (c_1 + \alpha - 1 - r\gamma_1, \gamma_1),$$

$$(c_1 + \beta + r - 1 - r\gamma_1, \gamma_1), ((d_j - r\delta_j, \delta_j))_{3, q_2}\} : \{(e_1 - k_1 + r_1 + r_1\lambda_1, \lambda_1)\},$$

$$((e_j + r_1\lambda_j, \lambda_j))_{2, p_3-1}, (e_1 + c - k_1 - 1 + r_1\lambda_1, \lambda_1); (e_1 + \alpha - k_1 - 1 + r_1\lambda_1, \lambda_1),$$

$$\left.(e_1 + \beta - k_1 - 1 + r_1\lambda_1, \lambda_1), ((f_j + r_1\mu_j, \mu_j))_{3, q_3}\}\right]$$

$$= \overset{*}{A}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [((a_j, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j, \beta_j))_{1, q_1}] : \{((c_j, \gamma_j))_{1, p_2-1}, (c_1 + c - k - 1, \gamma_1);$$

$$(c_1 + \alpha - 1, \gamma_1), (c_1 + \beta - 1, \gamma_1), ((d_j, \delta_j))_{3, q_2}\} : \{((e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1},$$

$$\left.(e_1 + c - k_1 - 1, \gamma_1); (e_1 + \alpha - k_1 - 1, \lambda_1), (e_1 + \beta - 1, \lambda_1), ((f_j, \mu_j)_{3, q_3}\}\right]$$

जहाँ $p_2 > m_2 \geqslant 0, q_2 \geqslant n^2 \geqslant 2; Re\,(1 - c + \beta) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k-1)$

$p_3 > m_3 \geqslant 1, q_3 \geqslant n_3 \geqslant 2; Re\,(e_1 - k_1 - \lambda_1 t) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k_1 - 1)$ (2·1)

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(e-a+k_1-c-r)\Gamma(1+a+c-e+r_1-k_1)}{\Gamma(1-c\quad r_1)\Gamma(e+k_1-a)\Gamma(1+a-e-k_1)}\, {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}$$

$$(1 + c_1 - d_{q_2}), x^r (-y)^{-r_1}.$$

$$\overset{*}{A}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [((a_j + \alpha_j r - \alpha_j r_1, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j + r\beta_j - \beta_j r_1, \beta_j))_{1, q_1}]:$$

$$\left\{\left(c_1 - \frac{k}{2} + r - r\gamma_1, \gamma_1\right), \left(-c_1 - \frac{k}{2} - 1 - r\gamma_1, \gamma_1\right), ((c_j - r\gamma_j, \gamma_j))_{3, p_2};\right.$$

$$\left.((d_j - r\delta_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2} - 1 - \frac{k}{2} - r\gamma_1, \gamma_1\right)\right\} : \{((e_j + r_1\lambda_j, \lambda_j))_{1, p_3-1},$$

$$(e_1 + \alpha + c - e + r_1 - k_1 + r_1\lambda_1, \lambda_1); (e_1 + a - 1 + r_1\lambda_1, \lambda_1), (e_1 + a - e - k_1 + r_1\lambda_1, \lambda_1),$$

$$\left.((f_j + r_1\mu_j, \mu_j))_{3, q_3}\}\right] =$$

$$\frac{\Gamma(e-c-a)\,.\,\Gamma(1+a+c-e)}{\Gamma(e-a)\,.\,\Gamma(1+a-e)} \times \overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big| \, [((a_j, \alpha_j))_{1}, {}_{p_1}]; \quad ((b_j, \beta_j))_{1}\, {}_{q_1}\Big]:$$

$$\left\{\left(c_1+\frac{k}{2}, \gamma_1\right), \left(-c_1-1-\frac{k}{2}, \gamma_1\right), ((c_j, \gamma_j))_3, {}_{p_2}; ((d_j, \delta_j))_1, {}_{q_2-1},\right.$$

$$\left.\left(d_{q_2}+\frac{k}{2}-1, \gamma_1\right)\right\} : \{((e_j, \lambda_j))_{1}, {}_{p_3-1}, (e_1+a-e+c, \lambda_1); (e_1+a-1, \lambda_1),$$

$$(e_1+a-1, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_3, {}_{q_3}\}\Big] \quad (2\cdot2)$$

जहाँ $p_2 \geqslant m_2 \geqslant 2\; p_3 > m_3 \geqslant 0;\; Re\left(c_1-\frac{k}{2}-s\gamma_1\right) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k-1)$

$q_2 \geqslant 1 \qquad q_3 \geqslant n_3 \geqslant 2;\; Re\,(e_1+a+c-e-k_1-\lambda_1 t) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k_1-1)$

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} \frac{\Gamma(c+k_1-r_1)\Gamma(e-a-c-k_1)\Gamma(1+a-e+c+k_1)\, {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}}{\Gamma(c)\Gamma(e-a-r_1)\Gamma(1+a-e+r_1)}$$

$$(1-a)_r(-1)^{k_1} x^r(-y)^{-r}\, \overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big| \, [((a_j+r\alpha_j-r_1\alpha_j, \alpha_j))_1, {}_{p_1};$$

$$((b_j+r\beta_j-r_1\beta_j, \beta_j))_1, {}_{q_1}] : \{((c_j-r\gamma_j, \gamma_j)_1, {}_{p_2-1}, (c_1+\beta-1-r\gamma_1, \gamma_1);$$

$$(c_1+\alpha+\beta-r-2-r\gamma_1, \gamma_1), ((d_j-r\delta_j, \delta_j))_2, {}_{q_2}\}: \{((e_j+r_1\lambda_j, \lambda_j))_1, {}_{p_3-1},$$

$$(e_1+a+c+k_1-e+r_1\lambda_1, \lambda_1); (e_1+a-1+r_1\lambda_1, \lambda_1), (e_1+a-e+r_1+r_1\lambda_1, \lambda_1),$$

$$((f_j+r_1\mu_j, \mu_j))_3, {}_{q_3}\}\Big]$$

$$= \frac{\Gamma(e-a-c)\Gamma(1+a+c-e)}{\Gamma(e-a)\Gamma(1+a-e)} \times \overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big| \, [((a_j, \alpha_j)_1, {}_{p_1};$$

$$((b_j, \beta_j))_1, {}_{q_1}\} : \{((c_j, \gamma_j))_1, {}_{p_2-1}, (c_1+\beta-k-1, \gamma_1); (c_1+\alpha+\beta-k-2, \gamma_1),$$

$$((d_j, \delta_j))_2, {}_{q_2}\} : \{((e_j, \lambda_j))_1, {}_{p_3-1}, (e_1+a+c-e, \lambda_1); (e_1+a-1, \lambda_1),$$

$$(e_1+a-e, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_3, {}_{q_3}\}\Big] \quad (2\cdot3)$$

जहाँ $p_2 > m_2 \geqslant 0,\; q_2 \geqslant n_2 \geqslant 1;\; Re\,(3-c_1-\alpha-\beta-\gamma_1 s) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k-1)$

$p_3 > m_3 \geqslant 0,\; q_3 \geqslant n_3 \geqslant 2;\; Re\,(1-c-k_1) \neq 0, -1, -2, \ldots -(k_1-1)$

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} \frac{\Gamma(\beta)\, {}^{k_1}c_{r_1}\, {}^{k}c_r}{} \frac{\Gamma(c-k_1)}{\Gamma(\beta-r)} \cdot \frac{\Gamma(e-a-c+k_1-r)\Gamma(1+a-e+c+r_1-k_1)}{\Gamma(c)\Gamma(e-a-r_1)\Gamma(1+a-e+r_1)}$$

$$(-1)^{k+k_1}(-x)^{-r}(-y)^{-r_1}\, \overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big| \, [a_j-r\alpha_j-r_1\alpha_j, \alpha_j)_1, {}_{p_1}$$

$$((b_j-r\beta_j-r_1\beta_j, \beta_j))_1, {}_{q_1}] : \{(c_1-k+r+r\gamma_1, \gamma_1), ((c_j+r\gamma_j, \gamma_j))_2, {}_{p_2-1},$$

$$(c_1+c-k-1+r\gamma_1, \gamma_1); (c_1+a-k-1+r\gamma_1, \gamma_1), (c_1+\beta-k-1+r\gamma_1, \gamma_1),$$

$$((d_j+r\delta_j, \delta_j))_{3, q_2}\} : \{((e_j+r_1\lambda_j, \lambda_j))_{1, p_3-1}, (e_1+a+c-e+r_1-k_1+r_1\lambda_1, \lambda_1);$$

$$(e_1+a-1+r_{11}\lambda, \lambda_1), (e_1+a-e+r_1+r_1\lambda_1, \lambda_1), ((f_j+r_1\mu_j, \mu_j))_{3, q_3}\}\Big]$$

$$= \frac{\Gamma(e-a-c)\Gamma(1-e+a+c)}{\Gamma(e-a)\Gamma(1+a-e)} \times \overset{*}{A}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| [((a_j, \alpha_j))_{1, p_1}; ((b_j, \beta_j))_{1, q_1}]:$$

$$\{((c_j, \gamma_j))_{1, p_2-1}, (c_1+c-k-1, \gamma_1); (c_1+a-k-1, \gamma_1), (c_1+\beta-1, \gamma_1),$$

$$((d_j, \delta_j))_{3, q_2}\} : \{((e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1}, (e_1+a+c-e, \lambda_1); (e_1+a-1, \lambda_1),$$

$$(e_1+a-e, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_{3, q_3}\}\Big] \qquad (2\cdot4)$$

जहाँ $p_2>m_2\geqslant 1$, $q_2\geqslant n_2\geqslant 2$ तथा $p_3>m_3\geqslant 0$, $q_3\geqslant n_3\geqslant 2$.

$Re\ (c_1-k-\gamma_1 s)\neq 0, -1, -2, \ldots -(k-1)$;

$Re\ (e_1+a+c-e-k_1-\lambda_1 t)\neq 0, -1, -2 \ldots -(k_1-1)$,

3. उपपत्ति

(2·0) को सिद्ध करने के लिये (2·0) के बाईं ओर के $\overset{*}{A}$ फलन को कंटूर समाकल के रूप में अभिव्यक्त करेंगे। (1·0) के बल पर हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}\, x^r \cdot y^{r_1}(1+c_1-d_{q_2})_r(1-a)_{r_1} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2}$$

$$\times \int_{L_1}\int_{L_2} \phi(s+r+t+r_1)\, \frac{\Gamma\left(1-c_1+\frac{k}{2}-r+r\gamma_1+\gamma_1 s\right) \cdot \Gamma\left((2+c_1+\frac{k}{2}+r\gamma_1+\gamma_1 s\right)}{1}$$

$$\times \frac{\prod_{j=3}^{m_2} (1-c_j+r\gamma_j+\gamma_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j-r\delta_j-s\delta_j)}{\prod_{j=1+m_2}^{p_2} \Gamma(c_j-r\gamma_j-\gamma_j s) \prod_{j=1+n_2}^{q_2-1} \Gamma(1-d_j+r\delta_j+s\delta_j) \cdot \Gamma\left(2-d_{q_2}+\frac{k}{2}+r\gamma_1+\gamma_1 s\right)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{m_3} (1-e_j+r_1\lambda_j+\lambda_j t) \cdot \Gamma(e_1+a+\beta-r_1-2-r_1\lambda_1-\lambda_1 t) \prod_{j=3}^{n_3} \Gamma(f_j-r_1\mu_j-\mu_j t)}{\prod_{j=1+m_3}^{p_3-1} \Gamma(e_j-r_1\lambda_j-\lambda_j t) \cdot \Gamma(e_1+\beta-1-r_1\lambda_1-\lambda_1 t) \prod_{j=1+n_3}^{q_3} \Gamma(1-f_j+r_1\mu_j+\mu_j t)}$$

$$x^s y^t\, ds\, dt \qquad (3\cdot0)$$

s को $s-r$ द्वारा तथा t को $t-r$ के द्वारा प्रतिस्थापित करके, समाकलनों तथा संकलनों का क्रम बदलकर और एर्डेल्यी का प्रयोग करके निम्नांकित प्राप्त करेंगे

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(s+t)\,\frac{\Gamma\left(1-c_1+\frac{k}{2}+\gamma_1 s\right)\Gamma\left(2+c_1+\frac{k}{2}+\gamma_1 s\right)\prod_{j=3}^{m_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=1+m_2}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\qquad\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)\Gamma(e_1+\alpha+\beta-2-\lambda_1 t)}{\prod_{j=1+n_2}^{q_2-1}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\,.\,\Gamma\left(2-d_{q_2}+\frac{k}{2}+\gamma_1 s\right)\prod_{j=1+m_3}^{p_3-1}\Gamma(e_j-\lambda_j t)\,.\,\Gamma(e_1+\beta-1-\lambda_1 t)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=2}^{n_3}\Gamma(f_j-\mu_j t)}{\prod_{j=1+n_3}^{q_3}\Gamma(1-f_j+\mu_j t)}\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-k,\ 1+c_1-d_{q_2}\\ c_1-\frac{k}{2}-\gamma_1 s\end{matrix};1\right]\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-k_1,\ 1-\alpha\\ 3-e_1-\alpha-\beta+\lambda_1 t\end{matrix};1\right]$$

$$x^s y^t\,ds\,dt \qquad (3\cdot1)$$

(3·1) में निहित गॉस के हाइपरज्यामितीय फलन को गामा-फलनों के रूप में व्यक्त करने तथा इस प्रकार से प्राप्त फल की विवेचना (1·0) के अनुसार करने पर थोड़े से सरलन के पश्चात् (2·0) के बाईं ओर का अंश प्राप्त होगा।

(2·1) से (2·4) तक के प्रसारों को (2.0) की ही भाँति सिद्ध किया जा सकता है।

(2·0) की विशिष्ट दशायें

दशा (i): (2·1) में $\alpha_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1$ रखने पर हमें शर्मा[2] का प्रसार $S\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ प्राप्त होगा जो प्राचलों के विशिष्टीकरण के फलस्वरूप अग्रवाल का प्रसार $G\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ प्रदान करेगा।

दशा (ii) $m_1=p_1=q_1=0$ रखने पर हमें

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{r_1=0}^{k_1}{}^{k}c_r\,{}^{k_1}c_{r_1}\,x^r, y^{r_1}(1+c_1-d_{q_2})_r(1-\alpha)_{r_1}$$

$$H^{n_2,\ m_2}_{p_2,\ q_2}\left[x\left|\begin{matrix}\left(c_1-\frac{k}{2}+r-r\gamma_1,\ \gamma_1\right)\left(-c_1-\frac{k}{2}-1-r\gamma_1,\ \gamma_1\right),\ ((c_j-r\gamma_j,\ \gamma_j))_{3,\ p_2}\\ ((d_j-r\delta_j-\delta_j))_{1,\ q_2-1},\ \left(d_{q_2}-1-\frac{k}{2}-r\gamma_1,\ \gamma_1\right)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[y \left| \begin{matrix} ((e_j - r_1\lambda_j, \lambda_j))_{1, p_3-1}, ((e_1+\beta-1-r_1\lambda_1, \lambda_1) \\ (e_1+\alpha+\beta-r_1-2-r_1\lambda_1, \lambda_1), ((f_j-r_1\mu_j, \mu_j)_{2, q_3} \end{matrix} \right.\right]$$

$$= H^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left[x \left| \begin{matrix} \left(c_1+\frac{k}{2}, \gamma_1\right), \left(-c_1-1-\frac{k}{2}, \gamma_1\right), ((c_j, \gamma_j))_{3, p_2} \\ ((d_j, \delta_j))_{1, q_2-1}, \left(d_{q_2}+\frac{k}{2}-1, \gamma_1\right) \end{matrix} \right.\right]$$

$$\times H^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[y \left| \begin{matrix} ((e_j, \lambda_j))_{1, p_3-1}, (e_1+\beta-k_1-1, \lambda_1) \\ (e_1+\alpha+\beta-k_1-2, \lambda_1), ((f_j, \mu_j))_{2, q_3} \end{matrix} \right.\right] \quad (4\cdot1)$$

की प्राप्ति होगी जहाँ

$$p_2 \geqslant m_2 \geqslant 2; \; p_3 > m_3 \geqslant 0; \; Re\left(c_1-\frac{k}{2}-\gamma_1 s\right) \neq 0, -1, -2 \ldots -(k-1)$$

$$q_2 \geqslant 1 \qquad q_3 \geqslant n_3 \geqslant 1; \; Re\,(3-e_1-\alpha-\beta-\lambda_1 t) \neq 0, -1, -2 \ldots (-k_1+1)$$

दशा (iii): $m_1=p_1=q_1=0$ तथा $\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1$ रखने पर

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} {}^{k}c_r \, {}^{k_1}c_{r_1} \, x^r \, . \, y^{r_1} (1+c_1-d_{q_2})_r (1-\alpha)_{r_1}$$

$$\times G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left(x \left| \begin{matrix} c_1-\frac{k}{2}, c_1-\frac{k}{2}-1-r, (c_j-r)_{3, p_2} \\ (d_j-r)_{1, q_2}-1, d_{q_2}-1-\frac{k}{2}-r \end{matrix} \right.\right) \times$$

$$G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[y \left| \begin{matrix} (e_j-r_1)_{1, p_3-1}, e_1+\beta-1-\gamma_1 \\ e_1+\alpha+\beta-2r_1-2, (f_j-r_1)_{2, q_3} \end{matrix} \right.\right] =$$

$$G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left(x \left| \begin{matrix} c_1+\frac{k}{2}, -c_1-1-\frac{k}{2}, (c_j)_{3, p_2} \\ (d_j)_{1, q_2-1}, d_{q_2}+\frac{k}{2}-1 \end{matrix} \right.\right) \times \; G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left[y \left| \begin{matrix} (e_j)_{1, p_3-1}, e_1+\alpha+\beta-k_1-2, e_1+\beta-k_1-1 \\ (f_j)_{2, q_3} \end{matrix} \right.\right] \quad (4\cdot2)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$p_2 \geqslant m_2 \geqslant 2;\ p_3 > m_3 \geqslant 0;\ Re\left(c_1 - \frac{k}{2} - s\right) \neq 0,\ -1,\ -2\ \ldots -(k-1)$$

$$a_2 \geqslant 1\ q_3 \geqslant n \geqslant 1;\ Re\ (3 - e_1 - a - \beta - t) \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots -(k-1)$$

तथा $(c_j)_{3,\,p_2}$ से $c_3, c_4, c_5 \ldots c_{p_2}$ का बोध होता है।

दशा (iv) : $n_2 = n_3 = 1;\ m_2 = p_2 = q_2 = 4$ तथा $m_3 = p_3 = q_3 = 2$ रखने पर और एर्डेल्यी[6] [1954 pp. 218-219] का प्रयोग करने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1=0}^{k_1} {}^{k}c_r\, {}^{k_1}c_{r_1}\, x^{r-k} (1 + c_1 - d_{q_2})_r (1-a)_{r_1} \frac{\prod_{h=1}^{3} \Gamma\left(c_1 - \frac{k}{2} + 1 + r - d_h\right)}{\Gamma(2+r) \prod_{h=3}^{4} \Gamma\left(c_1 - \frac{k}{2} + 1 + r - c_h\right)} .$$

$$\frac{\Gamma(c_1 - d_{q_2} + r + 2)\Gamma(3 + r_1 - a - \beta)}{\Gamma(2-\beta)}\ {}_2F_1\,[3 - a - \beta + r_1,\ 1 + e_1 - f_2;\ 2 - \beta;\ -y] \times$$

$$ {}_4F_3\left[c_1 - \frac{k}{2} + 1 - d_1 + r,\ c_1 - \frac{k}{2} + 1 - d_2 + r,\ c_1 - \frac{k}{2} + 1 - d_3 + r,\ c_1 - d_{q_2} + 2 + r;\ 2 + r,\ c_1 - \frac{k}{2} + 1 + r - c_3,\ c_1 - \frac{k}{2} + 1 + r - c_4;\ -x\right]$$

$$= \frac{\prod_{h=1}^{3} \Gamma\left(1 + c_1 + \frac{k}{2} - d_h\right) \cdot \Gamma(c_1 - d_{q_2} + 2) \cdot \Gamma(3 - a - \beta + k_1)}{\Gamma(2c_1 + k + 2) \cdot \prod_{h=3}^{4} \Gamma\left(c_1 + \frac{k}{2} + 1 - c_h\right) \cdot \Gamma(2 - \beta + k_1)}$$

$$ {}_4F_3\left[c_1 + \frac{k}{2} + 1 - d_1,\ c_1 + \frac{k}{2} + 1 - d_2,\ c_1 + \frac{k}{2} + 1 - d_3,\ c_1 - d_{q_2} + 2;\ 2c_1 + k + 2,\ c_1 + \frac{k}{2} + 1 - c_3,\ c_1 + \frac{k}{2} + 1 - c_4;\ -x\right]$$

$$\times\ {}_2F_1\,[3 - a - \beta + k_1,\ e_1 + 1 - f_2;\ 2 - \beta + k_1;\ -y].$$

इसी प्रकार (2·1) से (2·4) तक की विशिष्ट दशायें ज्ञात की जा सकती हैं।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एन०, **इंडियन जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०,** 1972, **3**, 353-60

2. शर्मा, बी० एल०, Annls Soc. Scientifique Bruxells, 1965 T. **79**, I, 26-40

3. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1965, **31A**, 536-46

4. गुप्ता, के० सी०, Annls Soc. Scientifique Bruxells, 1965 T. **79**, II, 97-106

5. चतुर्वेदी, के० के०, **डी०फिल थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय**, 1970

6. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, 1954, **भाग** I, **मैकग्राहिल प्रकाशन**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Page, 165-169

दो बहुपदियों के गुणनफल का समाकल निरूपण

बी० एम० सिंघल
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त--अप्रैल 18, 1974]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य दो विभिन्न सार्वीकृत बहुपदियों के लिये समाकल निरूपण व्युत्पन्न करना है ।

Abstract

Integral representation for the product of two polynomials. *By* B. M. Singhal, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.

The object of this paper is to derive an integral representation for the product of two different generalized polynomials.

1. वाट्सन[1], कार्लिट्ज[2] तथा चटर्जी[3],[4] ने दो लागेर, जैकोबी तथा बेसेल बहुपदियों के गुणनफल के लिये समाकल निरूपण ज्ञात किये हैं । अग्रवाल तथा सिंघल[5] ने हाल ही में वाट्सन, कार्लिट्ज तथा चटर्जी के फलों को सार्वीकृत किया है ।

चटर्जी[4] की विधि का अनुसरण करते हुये उसमें कतिपय संशोधन के साथ जैकोबी तथा लागेर बहुपदियों के गुणनफल के लिये समाकल निरूपण प्राप्त किया गया है । इस शोधपत्र का उद्देश्य दो विभिन्न सार्वीकृत बहुपदियों के गुणनफल के लिये समाकल निरूपण प्राप्त करना है ।

2. हम निम्न प्रकार से परिभाषित करेंगे :

$$f_n^{\alpha\ \beta}(\alpha_r, \beta_s, x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\ {}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-n,\ 1+\alpha+\beta+n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r; \\ 1+\alpha,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_s;\end{matrix}\ x\right] \tag{1}$$

$$f_n^{\alpha}(\alpha_r, \beta_s, x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\ {}_{r+1}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-n,\ \alpha_1.\ \ldots,\ \alpha_r; \\ 1+\alpha,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_s;\end{matrix}\ x\right] \tag{2}$$

स्पष्ट है कि ये बहुपदियाँ विशेष रूप से कई ज्ञात चिरप्रतिष्ठित बहुपदियों में समानीत हो जाती हैं ।

आगे हम निम्नांकित फलों[2] को व्यवहृत करेंगे।

$$\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}=\frac{2^{\mu+\nu}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(\mu-\nu)\theta i}\cos^{\mu+\nu}\theta\, d\theta,\ (\mu+\nu)>-1. \quad (3)$$

$$\Gamma(z)=\int_0^1 (\log 1/t)^{z-1}\, dt,\ \ (\text{Re } z>0). \quad (4)$$

हम तत्समक[5] का भी उपयोग करेंगे :

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{f(r+s)}{r!\,s!}\frac{x^r\,.\,y^s}{(m+n-r-s)}=\sum_{k=0}^{m+n}\frac{f(k)}{k!}\frac{(x+y)^k}{(m+n-k)!} \quad (5)$$

(1) तथा (2) परिभाषाओं पर विचार करने पर

$$f_m^{\alpha,\beta}(\alpha_r,\beta_s,x)\, f_n^{\alpha'}(\alpha_r',\beta_s',y)$$

$$=\frac{\Gamma^*(1+\alpha+m,\ 1+\alpha'+n)\Gamma_s^{**}(\beta_p,\ \beta'_p)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+m)\Gamma_r(\alpha_p,\alpha'_p)}\sum_{i,j}^{m,n}\frac{(-1)^{i+j}x^i y^j}{i!\,j!\,(m+n-i-j)!}$$

$$\times\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+m+i}{\Gamma(1+\alpha+\alpha'+i+j}\cdot\frac{(m+n-i-j)!}{(m-i)!\,(n-j)!}\cdot\frac{\Gamma(1+\alpha+\alpha'+i+j)}{\Gamma(1+\alpha+i,\ 1+\alpha'+j)}$$

$$\times\frac{\Gamma_r(\alpha_p+i,\ \alpha'_p+j,\ \alpha_p+\alpha'_p+i+j)}{\Gamma_r(\alpha_p+\alpha'_p+i+j)!}\frac{\Gamma_s(\beta_p+\beta'_p+i+j-1)}{\Gamma_s(\beta_p+i,\ \beta'_p+j,\ \beta_p+\beta'_p+i+j-1)}$$

(3) तथा (4) का उपयोग करने पर

$$f_m^{\alpha,\beta}(\alpha_r,\beta_s,x)\, f_n^{\alpha'}(\alpha'_r,\beta'_s,y)$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha+m,\ 1+\alpha'+n)\Gamma_s(\beta_p,\ \beta'_p)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+m)\Gamma_r(\alpha_p,\ \alpha'_p)}\sum_{i,\ j}^{m,n}\frac{(-1)^{i+j}x^i y^j}{i!\,j!\,(m+n-i-j)!}$$

$$\times\frac{\Gamma_r(\alpha_p+\alpha'_p+i+j)}{\Gamma_s(\beta_p+\beta'_p+i+j-1)\Gamma(1+\alpha+\alpha'+i+j)}\int_0^1(\log 1/t)^{\alpha+\beta+m+i}\,dt$$

$$\times\frac{2^{m+n-i-j}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{(m-i-n+j)\theta i'}\cos^{m+n-i+j}\theta\,d\theta\,.\,\frac{2^{\alpha+\alpha'+i+j}}{\pi}$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{(\alpha+i-\alpha'-j)\phi i'}\cos^{\alpha+\alpha'+i+j}\phi\,d\phi\,.\,\frac{2^{1}\overset{s}{\Sigma}(\beta_p+\beta'_p+i+j-2)}{\pi^s}$$

$^*\ \Gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots)\equiv\Gamma(\alpha_1)\,.\,\Gamma(\alpha_2)\ \ldots,$

$^{**}\ \Gamma_n(\alpha_p;\beta_p)\equiv\Gamma(\alpha_1,\beta_1)\ldots\Gamma(\alpha_n,\beta_n)$

$$\times s\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_1^s \{e^{(\beta_p+i-\beta'_p-j)\,\psi_p i'} \cos^{\beta_p+\beta'_p+i+j-2}\psi_p\} \prod_1^s d\psi_p$$

$$\times s\int_0^1 \prod_1^r \{t_p^{\alpha_p+i-1}(1-t_p)^{\alpha'_p+j-1}\} \prod_1^r dt_p.$$

उपर्युक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकल तथा संकलन के क्रम को बदलने पर, जो कि वैध है, हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा

$$f_m^{\alpha,\beta}(\alpha_r, \beta_s, x)\, f_n^{\alpha'}(\alpha'_r, \beta'_s, y)$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha+m,\ 1+\alpha'+n)\Gamma_s(\beta_p, \beta'_p)}{\Gamma(1+d+\beta+m)\Gamma_r(\alpha_p, \alpha'_p)}\cdot\frac{2^{m+n+\alpha+\alpha'-2s+\sum_1^s(\beta_p+\beta'_p)}}{\pi^{s+2}}$$

$$\times\int_0^1 r\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} s\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\log 1/t)^{\alpha+\beta+m}\prod_1^r\{t^{\alpha_p-1}(1-t_p)^{\alpha'_p-1}\}$$

$$\times e^{(\alpha-\alpha')\phi i'+(m-n)\theta i'+\sum_1^s(\beta_p-\beta'_p)\psi_p i'} \cos^{\alpha+\alpha'}\phi\cos^{m+n}\theta$$

$$\times\prod_1^s\cos^{(\beta_p+\beta'_p-2)}\psi_p\sum_{i,j}^{m,n}\frac{(-1)^{i+j}\,\Gamma_r(\alpha_p+\alpha'_p+i+j)}{i\,!\,j\,!\,(m+n-i-j)\,!\,\Gamma(1+\alpha+\alpha'+i+j)\Gamma_s(\beta'_p+\beta'_p+i+j-1)}$$

$$\times\left\{2^s\, xe^{(\phi-\theta+\sum_1^s\psi_p)i'}\log(1/t)\prod_1^r t_p\cdot\frac{\cos\phi}{\cos\theta}\prod_1^s\cos\psi_p\right\}^i$$

$$\times\left\{2^s\, ye^{(\theta-\phi-\sum_1^s\psi_p)i'}\cdot\frac{\cos\phi}{\cos\theta}\cdot\prod_1^s\cos\psi_p\prod_1^r(1-t_p)\right\}^j.dt.\prod_1^r dt_p.d\theta.\prod_1^s d\psi_p.d\phi.$$

अन्त में तत्समक (5) का व्यवहार करने पर

$$\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+m,\ 1+\alpha+\alpha'+m+n)\ \Gamma_s(\beta_p+\beta'_p-1)\Gamma_r(\alpha_p, \alpha'_p)}{\Gamma(1+\alpha+m,\ 1+\alpha'+n)\Gamma_r(\alpha_p,+\alpha'_p)\Gamma_s(\beta_p, \beta'_p)} \tag{6}$$

$$\times f_m^{\alpha,\beta}(\alpha_r, \beta_s.\, x)\, f_n^{\alpha'}(\alpha'_r, \beta'_s, y)$$

$$=\frac{2^{m+n+\alpha+\alpha'-2s+\sum_1^s(\beta_p,\beta'_p)}}{\pi^{s+2}}\int_0^1 r\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} s\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\log 1/t)^{\alpha+\beta+m}$$

$$\times \prod_1^r \left\{ t_p^{\alpha_p-1} (1-t_p)^{\alpha'_p-1} \right\} . e^{(\alpha-\alpha')\theta i+(m-n)\theta i'+\sum_1^s (\beta_p-\beta'_p)\psi_p i'}$$

$$\times \cos^{\alpha+\alpha'} \phi \cos^{m+n} \theta \prod_1^s \cos^{(\beta_p+\beta'_p-2)}\psi_p \; f_{m+n}^{\alpha+\alpha'} \; (\alpha_r+\alpha'_r, \beta_s+\beta'_s-1; z)$$

$$\times dt \, . \prod_1^r dt_p \, . \, d\theta \, . \prod_1^s d\psi_p \, d\phi.$$

जहाँ

$$z \equiv \left\{ \frac{xe^{(\phi-\theta+\sum_1^s \psi_p)i'} \log (1/t) \prod_1^r t_p + ye^{(\theta-\phi-\sum_1^s \psi_p)i'} \prod_1^r (1-t_p)}{\cos \theta} \right\} \times 2^s \cos \phi \prod_1^s \cos \psi_p.$$

(i) $r=s=0$ रखने पर यह लेखक[6] द्वारा दिये गये फल में समानीत हो जाता है ।

$$\frac{\Gamma(1+\alpha'+\beta+n, 1+\alpha+\alpha'+m+n)}{\Gamma(1+\alpha+m, 1+\alpha'+n)} \; L_m^{(\alpha)} (x) \; P_n^{(\alpha', \beta)} \; (y) \tag{7}$$

$$= \frac{2^{\alpha+\alpha'+m+n}}{\pi^2} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\log 1/t)^{\alpha'+\beta+n} \, e^{(m-n)\theta i+(\alpha-\alpha')\phi i}$$

$$\times \cos^{m+n} \theta \cos^{\alpha+\alpha'} \phi \, L_{m+n}^{(\alpha+\alpha')} \left(\frac{xe^{(\phi-\theta)i}+(1-y) \log (1/t) \; e^{(\theta-\phi)i}}{\cos \theta} \cos \phi \right)$$

$$\times dt \, . \, d\theta \, . \, d\phi.$$

(ii) $r=s=1$, $\alpha=\beta=0$, $\alpha_1=\xi$, $\beta_1=p$ तथा $\beta'_1=\alpha'_1$ रखने पर (6) से

$$\frac{\Gamma(1+\alpha'+m+n, p+\alpha'_1-1, \xi)}{\Gamma(1+\alpha'+n, \xi+\alpha'_1, p)} \; H_m(\xi, p, x) \; L_n^{(\alpha')} \; (y) \tag{8}$$

$$= \frac{2^{m+n+\alpha'+\alpha'_1+p-2}}{\pi^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\log 1/t)^m \, t_1^{\xi-1} \; (1-t_1)^{\alpha'_1-1}$$

$$\times e^{-\alpha'\phi i+(m-n)\theta i+(p-\alpha'_1)\psi_1 i} \cos^{\alpha'} \phi \cos^{m+n} \theta \cos^{(p-\alpha'_1-2)} \psi_1$$

$$\times f_{m+n}^{\alpha'} (\alpha'_1+\xi, \alpha'_1+p-1, z) \; dt \, . \, dt_1 \, . \, d\theta \, . \, d\psi_1 \, . \, d\phi.$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$z \equiv \left\{ \frac{xe^{(\phi-\theta+\psi_1)i} \log (1/t) \, . \, t_1+ye^{(\theta-\phi-\psi_1)} \; (1-t_1)}{\cos \theta} \right\} \times 2 \cos \phi \cos \psi_1$$

(iii) $r=s=1,\ \alpha=\beta=0,\ x=1,\ \alpha_1=\frac{1}{2}(1+Z+M),\ \beta_1=1+M$ तथा $\beta'_1=\alpha'_1$ रखने पर (6) पुनः

$$\frac{\Gamma(1+\alpha'+m+n,\ M+\alpha'_1,\ \frac{1}{2}(1+z+M))}{\Gamma(1+\alpha'+n,\ \frac{1}{2}(1+z+M+2\alpha'_1),\ 1+M)}\ .\ F_m^M(z)\ L_n^{\alpha'}(y) \tag{9}$$

$$=\frac{2^{m+n+\alpha'+\alpha'_1+M-1}}{\pi^3}\int_0^1\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\log 1/t)^m\ t_1^{1/2(z+M-1)}$$

$$\times(1-t_1)^{\alpha'_1-1}\ e^{\phi i+(m-n)\theta i+(1+M-\alpha'_1)\psi_1}\cos^{\alpha'}\phi\ .\ \cos^{m+n}\theta\ .\ \cos^{M+\alpha'_1-1}\psi_1$$

$$\times f_{m+n}^{\alpha'}(\tfrac{1}{2}(1+z+M+2\alpha'_1),\ M+\alpha'_1,\ G)\ dt\ .\ dt_1\ .\ d\theta\ .\ d\psi_1\ .\ d\phi$$

में समानीत हो जाता है जहाँ

$$G\equiv\left\{\frac{e^{(\phi-\theta+\psi_1)i}\log(1/t)\ .\ t_1+ye^{(\theta-\phi-\psi_1)i}(1-t_1)}{\cos\theta}\ 2\cos\phi\cos\psi_1\right\}$$

तथा $P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ H_n(\xi,p,x),\ L_n^{(\alpha)}(x)$ तथा $f_n^m(z)$ क्रमशः जैकोबी, राइस, लागेर तथा पास्टरनाक की बहुपदियाँ[7] हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एम० अग्रवाल का आभारी है जिन्होंने मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. वाट्सन, जी० एन० **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1938, **13**, 204-209.
2. कार्लिट्ज, एल०, Boll. Un. Mat. Ital. 1962, (3), **17**, 25-8.
3. चटर्जी, एस० के०, Boll. Un. Mat. Ital 1963, (1), **18**, 377-381.
4. वही, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1964, **39**, 753-56.
5. अग्रवाल, बी० एम० तथा सिंघल, बी० एम०, **(प्रकाशनाधीन)**
6. सिंघल, बी० एम०, **(प्रकाशनाधीन)**
7. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, **न्यूयार्क** 1960, **पृष्ठ** 254, 200, 287, 291.
8. व्हिटेकर, ई० टी०, तथा वाट्सन, जी०एन०, "A Course of Modern Analysis, 4th Ed. **कैम्ब्रिज**, 1952, **पृष्ठ** 263, 243.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Pages 171-175

स्टाइल्जे परिवर्त तथा K-परिवर्त पर कुछ प्रमेय

भरत सिंह
यूनिवर्सिटी आफ विस्कान्सिन सेंटर, विस्कान्सिन

[प्राप्त—नवम्बर 30, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में दो प्रमेय सिद्ध किये गये हैं। पहले में k-परिवर्त तथा स्टाइल्जे परिवर्त के मध्य सरल सम्बन्ध स्थापित हुआ है। प्राप्त फल की उपयोगिता एक उदाहरण द्वारा दी गई है। दूसरा प्रमेय u कोटि के k-परिवर्त के सम्बन्ध में है। इसका उपयोग कुछ फलनों के कतिपय अज्ञात k-परिवर्तों को व्युत्पन्न करने के लिये किया गया है।

Abstract

Some theorems on Stielje's transform and k-transform. *By* Bhagat Singh, University of Wisconsin Center, Manitowoc, Wisconsin, U.S.A.

Our purpose here is to prove two theorems. The first one establishes a simple relationship between k-transform and Stielje's transform. The usefulness of the result obtained is shown by an example in which an unknown Stielje's transform is computed.

The second theorem is about the k-transform of order u and it is used to derive some unknown k-transforms of some functions.

1. **स्टाइल्जे परिवर्त**

हम [1 p. 3, 221, 213] को

$$H_u\{f(x); y\} \equiv \int_0^\infty f(x)\ \mathcal{J}_u(xy)(xy)^{1/2}\, dx, y>0$$

$$k_u\{f(x), y\} \equiv \int_0^\infty f(x) k_u(xy)\,(xy^{1/2})\ dx,\ y>0$$

तथा $$G\{f(x); y\} \equiv \int_0^\infty f(x)(x+y)^{-1}\, dx.$$

हैंकेल परिवर्त, u कोटि का k-परिवर्त तथा प्रथम कोटि का स्टाइल्ज़े परिवर्त के रूप में सम्बो धित करेंगे ।

प्रमेय (1·1): माना कि

(i) $\phi(y)$ u कोटि के $f(x)$ का हैंकेल परिवर्त है ;

(ii) $\psi(a)$ u कोटि के $f(x)$ का k-परिवर्त है ;

(iii) $f(x)$ पूर्णतया समाकलनीय तथा $[0, \infty]$ पर सतत है,

तो $a^{u-1/2}\psi(a) \equiv \frac{1}{2} G\{y^{u/2-1/4}\phi(\sqrt{y});\ a^2\},\ R(a) > 0.$

उपपत्ति

$$\phi(y) = \int_0^\infty f(x)\ J_u(xy)\,(xy)^{1/2}\, dx. \tag{1}$$

(1) को $\dfrac{y^{u+1/2}}{y^2+a^2}$ द्वारा गुणा करने पर तथा $[0, \infty]$ सीमाओं के मध्य समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty \frac{y^{u+1/2}}{y^2+a^2}\,\phi(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{y^{u+1/2}}{y^2+a^2}\left[\int_0^\infty f(x)\ J_u(xy)\,(xy)^{1/2}\, dx\right] dy. \tag{2}$$

(2) के बाईं ओर को फिर से लिखने पर तथा दाईं ओर के समाकलन क्रम को बदल देने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y^{2/u-1/4}}{y+a^2}\,\phi(\sqrt{y})\, dy = \int_0^\infty f(x)\left[\int_0^\infty \frac{y^{u+1/2}}{y^2+a^3}\,J_u(xy)\,(xy)^{1/2}\, dy\right] dx. \tag{3}$$

अब हम कल्पना करेंगे कि $Re\ a > 0$ तथा $-1 < Re\ u < 3/2$, तथा

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y^{u/2-1/4}}{y+a^2}\,\phi(\sqrt{y})\, dy = a^u \int_0^\infty \sqrt{x}\ k_u(ax) f(x)\, dx$$

$$= a^{u-1/2}\int_0^\infty \sqrt{(ax)}\,k_u(ax) f(x)\, dx$$

को प्राप्त करने के लिये फल (12) या [1, p. 23] का प्रयोग करेंगे जिससे पुन: हमें

$$\frac{1}{2}\, G\{y^{u/1-1/4}\phi(\sqrt{y});\ a^2\} = a^{u-1/2} k_u\{f(x);\ a\} = a^{u-1/2}\psi(a)$$

प्राप्त होगा । इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण हुई ।

उदाहरण 1

माना कि

$$f(x)=x^{2n+u+1/2}e^{-1/4x^2}$$

तब [1, p. 132] के फल (25) में $u=-n-\frac{u}{2}-\frac{1}{2}$ रखने पर हमें

$$\psi(a)=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-n-u/2-1/2}\right)a^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1+u}{2}+n+\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-u}{2}+n+\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

$$.\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)w-n-\frac{u}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}u(a^2).$$

प्राप्त होगा।

पुनः फल (13) या [1, p. 30] से

$$\phi(y)=2^{2n+u+1}n\,!\,y^{u+1/2}\ \exp\,(-y^2)\ L_n^{u}\,(y^2) \quad (5)$$

प्राप्त होगा।

प्रमेय के फल में (4) तथा (5) में से मान प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$G\{y^u\exp\,(-y)L_n^{u}\,(y);\,a^2\}\equiv a^{u-1}\,\frac{1}{n!}\,\Gamma(n+u+1)\Gamma(n+1)\,\exp\,(a^2/2)$$

$$.\,W-n-\frac{u}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}u(a^2);\ n\geqslant 0,\ Re\,(u)>-\frac{1}{2};$$

प्राप्त होगा जो स्टाइल्जे का नवीन परिवर्त है।

2. k-परिवर्त

प्रमेय (2·1) : माना कि

(i) $\psi(y)$ u कोटि के $f(x)$ का k-परिवर्त है;

(ii) $f(x)$ पूर्णतया समाकलनीय और $[0, \infty]$ में संतत है,

तो $k_u\{\psi(1/x);\,a\}\equiv\frac{\pi}{4(a)^{1/4}}\,u_{2u}\{f\,(x^2/4)\,.\,x^{3/2};\,a^{1/2}\}.$

उपपत्ति

$$\psi(y)\equiv k_u\{f(x);\,y\}$$

$$\psi(y)=\int_0^\infty f(x)k_u(xy)\,(xy)^{1/2}\,dx \quad (6)$$

(6) को $y^{-5/2}k_u(a/y)$ से गुणा करने पर तथा $[0, \infty]$ सीमाओं के मध्य समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty y^{-5/2}k_u(a/y)\psi(y)\,dy=\int_0^\infty y^{-5/2}k_u(a/y)\left[\int_0^\infty f(x)k_u(xy)(xy)^{1/2}\,dx\right]dy. \tag{7}$$

दाईं ओर के समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$\int_0^\infty y^{-5/2}k_u(a[y)\psi(y)\,dy=\int_0^\infty f(x)\left[\int_0^\infty y^{-5/2}k_u\,(a/y)k_u(xy)\,(xy)^{1/2}\,dy\right]dx. \tag{8}$$

[1, p. 46] के सूत्र (55) का उपयोग करने पर हमें (8) से

$$\int_0^\infty y^{-5/2}k_u(a/y)\psi(y)\,dy=\pi\int_0^\infty f(x)a^{-1}x^{1/2}k_{2u}(2a^{1/2}x^{1/2})\,dx. \tag{9}$$

प्राप्त होगा। अब (9) में

$$\text{बाम पक्ष} =\int_0^\infty y^{-5/2}k_u(a/y)\psi(y)\,dy$$

$$=\int_0^\infty x^{1/2}k_u(ax)\psi(1/x)\,dx$$

$$=a^{-1/2}\int_0^\infty \sqrt{(ax)}k_u(ax)\psi(1/x)\,dx$$

$$\text{अतः वाम पक्ष} =a^{-1/2}k_u\{\psi(1/x);\, a\} \tag{10}$$

(9) के दाहिनी ओर

$$\text{दायाँ पक्ष} =\pi\int_0^\infty f(x)a^{-1/2}x^{1/2}k_{2u}(2a^{1/2}x^{1/2})\,dx$$

माना कि $x=z^2$, तो

$$\text{दायाँ पक्ष} =\pi\int_0^\infty f(z^2)a^{-1/2}z\,k_{2u}(2a^{1/2}z)\,.\,2z\,dz$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\int_0^\infty f(z^2/4)z^2/4\,.\,k_{2u}(a^{1/2}z)\,dz$$

$$=\frac{\pi}{4(a)^{3/4}}\int_0^\infty f(x^2/4)\,.\,x^{3/2}k_{2u}(a^{1/2}x)(a^{1/2}x)^{1/2}\,dx.$$

इस प्रकार

$$\text{दायाँ पक्ष}=\frac{\pi}{4(a)^{3/4}}\,k_{2u}\{f(x^2/4)\,.\,x^{3/2};\,a^{1/2}\}. \tag{11}$$

(10) तथा (11) से वांछित फल की प्राप्ति होती है और उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

उदाहरण 2

माना कि $f(x)=x^{-1/2}(x+a)^{-1}$ तो,

$$\psi(y)=\frac{\pi^2}{2}[\csc(u\pi)]^2 y^{1/2}[I_u(ay)+I_{-u}(ay)-e^{-iu\pi/2}J_u(iay)-e^{+iu\pi/2}J_{-u}(iay). \quad (12)$$

$$k_{2u}\{x^{3/2}f(x^2/4);\sqrt{a}\}$$

$$=8\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4a)}k_{2u}(\sqrt{ax})(a^{1/2}x)^{1/2}\,dx$$

$$=2a^{1/4}[f(2u)+f(-2u)]+2a^{1/4}\Gamma(-u)\Gamma(u)\cdot {}_1F_2(1;3-u,1+u;-\alpha a) \quad (13)$$

जहाँ $f(u)=(\alpha a)^{u/2}\Gamma(-u)\Gamma(1+u/2)\Gamma(-u/2)\;{}_0F_1(1+u;-\alpha a)$

तथा $|Re\,u|<2,\ u\neq0,\ u\neq1$.

अतः प्रमेय (2·1) से हमें

$$k_u\{x^{-1/2}(I_u(a/x)+(I_{-u}(a/x)-e^{-iu\pi/2}J_u\left(\frac{i\pi}{x}\right)-e^{-iu\pi/2}J_{-u}\left(\frac{ia}{x}\right);a\} \quad (14)$$

$$=\frac{[\csc(u\pi)]^{-2}}{\pi}\{[f(2u)+f(-2u)]+\Gamma(-u)\Gamma(u)\cdot {}_1F_2(1;3-u,1+u;-\alpha a\},$$

$$|Re\,u|<2,\ u\neq1,0.$$

की प्राप्ति होगी।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, मैग्नस, ग्रोबर हेटिंगर तथा ट्रिकोमी, Tables of Integral Transforms, भाग 2, बेटमैन प्रोजेक्ट, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
2. डहिया, आर० एस० तथा सिंह बी०, Tamkang Journal of Mathematics (स्वीकृत)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No 3, July, 1974, Pages 177-183

दो चरों वाले H-फलनों की कतिपय अपरिमित श्रेणियाँ

एन० एस० होरा
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, रतलाम

[प्राप्त—जून 30, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में दो चरों वाले H-फलनों की कतिपय श्रेणियाँ संकलित की गयी हैं जिसमें H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में व्यक्त करते हुये तब समाकलन और संकलन के क्रम का विनिमय किया गया है। विशिष्ट दशाओं के रूप में माइज़र के G-फलन के लिये श्रेणियाँ प्राप्त की गई हैं।

Abstract

Some infinite series of H-functions of two variables. *By* N. S. Hora, Department of Mathematics, Government College, Ratlam.

In this paper some infinite series of H-function of two variables have been summed up by expressing the H-function as Mellin-Barnes type integral and then interchanging the order of integration and summation. As particular cases we have obtained series for Meijer's G-function.

मुनोट तथा कल्ला[1] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन को गुलाटी[2] ने निम्न प्रकार से व्यक्त किया है

$$H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\ [(c_{p_2}, C_{p_2})];[(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [b_{q_1}, B_{q_1})];\ [(d_{q_2}, D_{q_2})];\ [f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j-B_js) \prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js) \prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt) \prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+B_js) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-A_js) \prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+D_jt)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j s+E_j t)\, y^s\, z^t\, ds\, dt}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-C_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_j s-E_j t) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_j s+F_j t)} \quad (1\cdot1)$$

जहाँ L_1 तथा L_2 बार्नीज प्रकार के उपयुक्त कंटूर हैं। इनमें से L_1 तो s-तल में इस प्रकार अवस्थित है कि $\Gamma(b_j-B_j s), j=1, \ldots, m_1$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+A_j s),\ j=1, \ldots, n_1$ और $\Gamma(1-e_j+E_j s+E_j t), j=1, \ldots, n_3$ के पोल बाईं ओर पड़ें। इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल पर स्थित है जिससे $\Gamma(d_j-D_j t), j=1, \ldots, m_2$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर $\Gamma(1-c_j=C_j t), j=1, \ldots, n_2$ तथा $\Gamma(1-e_j+E_j s+E_j t), j=1, \ldots, n_3$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

$0 \leqslant m_1 \leqslant q_1,\ 0 \leqslant m_2 \leqslant q_2,\ 0 \leqslant n_1 \leqslant p_1,\ 0 \leqslant n_2 \leqslant p_2,\ 0 \leqslant n_3 \leqslant p_3$

द्विगुण समाकल अभिसारी होता है यदि

$$\sum_{j=1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j < 0,\ \sum_{j=1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j - \sum_{j=1}^{q_2} D_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j < 0,$$

$$\sum_{j=1}^{r_1} A_j - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{r_3} E_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j \equiv \alpha > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2} C_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{r_3} E_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j \equiv \beta > 0,$$

तथा $|\arg y| < \frac{1}{2}\alpha\pi,\ |\arg z| < \frac{1}{2}\beta\pi$.

यहाँ पर और आगे सर्वत्र $[(a_p, A_p)]$ के द्वारा $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)$ प्राचलों के सेट का बोध होगा। संकेत (a_p) $a_1, \ldots, a_p$ के लिये है। इस शोधपत्र में सर्वत्र अंग्रेजी के बड़े अक्षरों का प्रयोग धन पूर्णांकों के लिये हुआ है।

इसके आगे (1·1) का दहिना पक्ष $H\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ द्वारा व्यक्त किया गया जावेगा और यही दो चरों वाला वांछित H-फलन है।

इस अनुभाग में हम निम्नांकित अपरिमित श्रेणियों की स्थापना करेंगे।

प्रथम श्रेणी :

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(k;\, r)}{r\,!}\, H^{(m_1+1, m_2);(n_1+1, n_2), n_3}_{(p_1+2, p_2);(q_1+2, q_2), q_3} \left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \\ \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a-k-r,\ l), [(a_{p_1}, A_{p_1})], (a+r,\ l); \\ [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ (b+k+r,\ l), [(b_{q_1}, B_{q_1})], (b-r,\ l); \\ [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\Gamma(a-b-\frac{3}{2}k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(a-b-k)} H^{(m_1+1,m_2);(n_1+1,n_2),n_3}_{(p_1+2,p_2),p_3;(q_1+2,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}(a-k, l), [(a_{p_1}, A_{p_1})], (a-\frac{1}{2}k, l); [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ (b+k, l);[(b_{q_1}, B_{q_1})],(b+\frac{1}{2}k, l);[(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})]\end{matrix}\right] \quad (2\cdot1)$$

जहाँ (1·1) में दिये गये वैधता के प्रतिबन्धों के अतिरिक्त $\text{Re}(2a-2b-3k)>0$

उपपत्ति :

(2·1) को सिद्ध करने के लिये इसके बाईं ओर (1·1) में से मान रखते हैं और समाकलन के क्रम को परिवर्तित करके निम्नांकित की प्राप्ति करेंगे ।

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j-1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\Gamma(1-a+k+ls)\Gamma(b+k-ls)\, y^s z^t}{\prod_{j=n_3-1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-fj+F_js+F_jt)\Gamma(a-ls)\Gamma(1-b+ls)}$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}k,\ 1-a+k+ls,\ b+k-ls;\ 1 \\ a-ls,\ 1-b+ls\end{matrix}\right] ds\, dt$$

डिक्सन के प्रमेय [3, p. 362] के प्रयोग से फल प्राप्त होता है अर्थात्

$$F\left(\begin{matrix}a,\ b,\ c;\ 1 \\ a-b+1,\ a-c+1\end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+1)\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b-c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-c+1)\Gamma(a-b-c+1)},$$

यदि $R(a-2b-2c)>-2$ तथा (1·1).

(2·1) की ही भाँति अग्रसर होकर निम्नांकित स्थापना की जा सकती है :

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{(k;\ r)}{r!} H^{(m_1,m_2,+1);(n_1,n_2+1),n_3}_{(p_1,p_2+2),p_3;(q_1,q_2+2),q_3}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}[(a_{p_1}, A_{p_1})];\ (a-k-r,\ l)[(c_{p_2}, C_{p_2})], \\ (a+r,\ l);\ [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\ (b+k+r,\ l),[(d_{q_2}, D_{q_2})], \\ (b-r,\ l);\ [(f_{q_3}, F_{q_3})]\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\Gamma(a-b-\frac{3}{2}k)}{\Gamma(k+1)\Gamma a-b-k)} H^{(m_1,m_2+1);(n_1,n_2+1),n_3}_{(p_1,p_2+2),p_3;(q_1,q_2+2),q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; (a-k, l), [(c_{p_2}, C_{p_2})], (a-\frac{1}{2}k, l); [e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; (b+k, l), [(d_{q_2}, D_{q_2})], (b+\frac{1}{2}k, l); [f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right] \quad (2\cdot 2)$$

वैधता के सारे प्रतिबन्ध (2·1) के ही समान हैं।

द्वितीय श्रेणी

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{2a_1-2-r}\, u^r}{r\,!} H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} y^{-2l} \\ \\ z \end{matrix}\left|\begin{matrix} (a_1-r, l),(a_2,A_2), \ldots, (a_{p_1},A_{p_1}); \\ [(c_{p_2}, c_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; \\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right.\right]$$

$$=(y^2-yu)^{a_1-1} H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} (y^2-yu)^{-l} \\ \\ z \end{matrix}\left|\begin{matrix} (a_1, l),(a_2, A_2), \ldots, \\ (a_{p_1},A_{p_1});[(c_{p_2},C_{p_2})];[e_{p_3},E_{p_3})] \\ [(b_{q_1},B_{q_1})];[(d_{q_2},D_{q_2})]; \\ [(f_{q_3},F_{q_3})] \end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot 3)$$

जिसमें (1·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अतिरिक्त $\left|\frac{u}{y}\right|<1$

उपपत्ति

इसे सिद्ध करने के लिये बाईं ओर (1·1) में से मान रखते हैं और समाकलन का क्रम बदल देते हैं :

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j-2}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\Gamma(1-a_1+ls)}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)} y^{2a_1-2-2ls}z^t$$

$$\times{}_1F_0\left(1-a_1+ls;\ \ldots;\frac{u}{y}\right) ds\ dt$$

चूँकि $\quad y^{2a_1-2-2ls}\,{}_1F_0\left(1-a_1+ls\,;\,\ldots\,;\,\frac{u}{y}\right)=(y^2-yu)^{a_1-1-ls}$

अतः (1·1) के प्रयोग से फल की प्राप्ति होती है।

(2·3) की ही भाँति अग्रसर होने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{2c_1-2-r}\,u^r}{r\,!}\,H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & [(a_{p_1},A_{p_1})];[(c_1-r,\,l),\,(c_2,\,C_2),\ldots \\ & \ldots,(c_{p_2},C_{p_2})];\,[(e_{p_3},E_{p_3})] \\ z^{-2l} & [(b_{q_1},B_{q_1})];\,[(d_{q_2},D_{q_2})]; \\ & [(f_{q_3},F_{q_3})]\end{array}\right]$$

$$=(z^2-zu)^{c_1-1}\,H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & [(a_{p_1},A_{p_1})];(c_1,l),(c_2,C_2),\ldots \\ & \ldots,(c_{p_2},C_{p_2})];[(e_{p_3},E_{p_3})] \\ (z^2-zu)^{-l} & [(b_{q_1},B_{q_1})];[(d_{q_2},D_{q_2})]; \\ & [(f_{q_3},F_{q_3})]\end{array}\right] \tag{2·4}$$

की प्राप्ति होती है जहाँ (1·1) की वैधता के प्रतिबन्धों के अतिरिक्त $\left|\frac{u}{z}\right|<1$

तृतीय श्रेणी

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h+2r)\Gamma(h+r)(h-a+1)_r(k)_r\Gamma(a-k)}{r\,!\,\Gamma(a+r)\Gamma(h-k+1+r)}\,H^{(m_1+1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1+2,p_2),p_3;(q_1+1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & (a_1-r,\,l),\,(a_2,A_2),\ldots,(a_{p_1},A_{p_2}),(h+a_1+r,\,l),\,(a+a_1-k-1,\,l);\,[(c_{p_2},C_{p_2})];[(e_{p_3},E_{p_3})] \\ z & (h+a_1-k,\,l),\,[(b_{q_1},B_{q_1})];\,[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{array}\right]$$

$$=H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1+1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & (a_1,\,l),(a_2,A_2,\ldots,(a_{p_1},A_{p_1}),(a+a_1-1,\,l); \\ & [(c_{p_2},C_{p_2})];\,[e_{p_3},E_{p_3})] \\ z & [(b_{q_1},B_{q_1})];\,[(d_{q_2},D_{q_2})];\,[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{array}\right] \tag{2·5}$$

जहाँ (1·1) की वैधता के प्रतिबन्धों के अतिरिक्त $\mathrm{Re}(a-k)>0$

उपपत्ति

(2·5) को सिद्ध करने के लिये बाईं ओर के H-फलन में (1·1) को व्यवहृत करते हैं और संकलन तथा समाकलन का क्रम परिवर्तित कर देते हैं तो पाते हैं कि

$$(h+2r)=\frac{h(\frac{1}{2}h+1)_r}{(\frac{1}{2}h)_r}$$

तब व्यंजक निम्न रूप धारण कर लेता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\Gamma(h+a_1-k-ls\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\Gamma(1-a_1+ls)\prod_{j=2}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_is)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\Gamma(a+a_1-k-1-ls)\Gamma(h+a_1-ls)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\,y^s\,z^t}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)}$$

$$\times\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(a-k)}{\Gamma a\,\Gamma(h-k+1)}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix}h,\frac{1}{2}h+1,h-a+1,k,1-a_1+ls;\\ \frac{1}{2}h,a,h-k+1,h+a_1-ls\end{matrix}\;1\right]ds\,dt$$

डूगल के सूत्र [5, p. 372] को व्यवहृत करने पर वांछित फल प्राप्त होता है अर्थात्

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}a+1,b,c,d;\\ \frac{1}{2}a,a-b+1,a-c+1,a-d+1;\end{matrix}\;1\right]$$

$$=\frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(a-d+1)\Gamma(a-b-c-d+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a-b-c+1)\Gamma(a-c-d+1)\Gamma(a-d-b+1)},\ \mathrm{Re}(a-b-c-d)>-1$$

(2·5) की ही विधि का पालन करते हुये हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h+2r)\Gamma(h+r)(h-a+1)_r(k)_r\Gamma(a-k)}{r!\,\Gamma(a+r)\Gamma(h-k+1+r)}\,H^{(m_1,m_2+1);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2+2),p_3;(q_1,q_2+1),q_3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];(a_1-r,l),(c_2,C_2),\ldots,(c_{p_2},C_{p_2}),(h+a_1+r,l),(a+a_1-k-1,l);[(e_{p_3},E_{p_3})]\\ [(b_{q_2},B_{q_1})];(h+a_1-k,l),[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right]$$

$$=H^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2+1),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];(a_1,l),(c_2,C_2),\ldots,(c_{p_2},C_{p_2}),\\(a+a_1-1,l);[(e_{p_3},E_{p_3})]\\ [(b_{q_1},B_{q_1})];[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right]\qquad(2\cdot6)$$

की प्राप्ति होती है जिसकी वैधता के प्रतिबन्ध (2·5) की ही भाँति है।

विशिष्ट दशायें

समस्त बड़े अक्षरों को इकाई के तुल्य मान कर, $m_2=q_2=1$, $n_2=n_3=p_2=q_3=p_3=0$, रखकर तथा गुलाटी[2] के सूत्र का अर्थात्

$$H\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = G^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y & (a_{p_1}); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ z & (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right]$$

और बाजपेई के सूत्र [4, 1·5] अर्थात्

$$G^{(m,1); (n,0), 0}_{(p,0), 0; (q,1), 0} \left[\begin{array}{c|c} x & (a_p); \ldots \\ & \ldots \\ y & (b_q); 0 \\ & \ldots \end{array} \right] = e^{-y} G^{m,n}_{p,q}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right)$$

का उपयोग करते हुये हमें (2·1) से छाबरा[5] द्वारा दिये गये माइजर के G-फलन की अपरिमित श्रेणी प्राप्त होती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एस० सी० गुलाटी अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया ।

निर्देश

1. मुनोट,, पी० सी०, तथा कल्ला, एस० एल०, (प्रेषित)
2. गुलाटी, एच० सी०, (प्रेषित)
3. मैकराबर्ट, टी० एम०, Functions of a Complex Variable, लन्दन 1962.
4. बाजपेई, एस० डी०, (प्रेषित)
5. छाबरा, एस० पी०, पी० एच-डी० थीसिस, रविशंकर विश्वविद्यालय, रायपुर, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Pages 185-195

सार्वीकृत H-फलन के प्रसार सूत्र

आर० के० सक्सेना तथा जी० सी० मोदी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 12, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य संक्रियात्मक कलन द्वारा दो चरों वाले H-फलन से सम्बद्ध कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करना और दो चरों वाले H-फलन के हेतु कतिपय प्रसार सूत्रों का मान ज्ञात करने के लिये उन्हें व्यवहृत करना है।

Abstract

Expansion formulae of the generalised H-function. *By* R. K. Saxena and G. C. Modi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The object of this paper is to evaluate some integrals associated with the H-function of two variables by means of operational calculus and to apply them in evaluating certain expansion formulae for the H-function of two variables.

कल्ला तथा मुनोट [1, p. 67] के द्वारा प्राप्त दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन को सक्सेना [2, p. 185] की अंकन पद्धति में निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H^{l,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E,\, [A:C],\, F,\, [B:D]} \left[\begin{array}{c|c} & (e, \theta) \\ x & (a, \alpha)^*;\ (c, \gamma) \\ y & (f, \phi) \\ & (b, \beta);\ (d, \delta) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} x_1(u) x_2(v) x_3(u+v) x^{-u} y^{-v}\, du\, dv, \qquad (1\cdot1)$$

$*(a, \alpha)$ के द्वारा $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_A, \alpha_A)$ का बोध होता है

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई माना जावेगा और

$$\chi_1(u)=\frac{\prod_1^{m_1}\Gamma(b_j+\beta_j u)\prod_1^{n_1}\Gamma(1-a_j-\alpha_j u)}{\prod_{m_1+1}^{B}\Gamma(1-b_j-\beta_j u)\prod_{n_1+1}^{A}\Gamma(a_j+\alpha_j u)},$$

$$\chi_2(v)=\frac{\prod_1^{m_2}\Gamma(d_j+\delta_j v)\prod_1^{n_2}\Gamma(1-c_j-\gamma_j v)}{\prod_{m_2+1}^{D}\Gamma(1-d_j-\delta_j v)\prod_{n_2+1}^{C}\Gamma(c_j+\gamma_j v)}.$$

तथा

$$\chi_3(w)=\frac{\prod_1^{l}\Gamma(e_j-w\theta_j)}{\prod_{l+1}^{E}\Gamma(1-e_j+w\theta_j)\prod_1^{F}\Gamma(f_j-w\phi_j)}.$$

निम्नांकित सरलीकृत कल्पनायें भी की जावेंगी :

(i) $0\leqslant n_1\leqslant A,\ 1\leqslant m_1\leqslant B,\ 0\leqslant n_2\leqslant C,\ 1\leqslant m_2\leqslant D,\ 0\leqslant l\leqslant E.$

(ii) $l, m_1, m_2, n_1, n_2, A, B, C, D, E$ तथा F अनृण पूर्णांक हैं ।

(iii) समाकल्य के समस्त पोल सरल हैं ।

((v) समस्त $a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ तथा ϕ सत्य हैं और समस्त $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ तथा ϕ धनात्मक हैं,

(v) समाकल (1·1) अभिसारी होता है यदि

$$\omega_1=\sum_1^E\theta_j+\sum_1^B\beta_j-\sum_1^F\phi_j-\sum_1^A\alpha_j\leqslant 0,$$

$$\omega_2=\sum_1^E\theta_j+\sum_1^D\delta_j-\sum_1^F\phi_j-\sum_1^C\gamma_j\leqslant 0.$$

$$|\arg x|<\frac{\pi\varphi_1}{2},\quad |\arg y|<\frac{\pi\varphi_2}{2},$$

जहाँ

$$\varphi_1=\sum_1^{m_1}\beta_j-\sum_{m_1+1}^{B}\beta_j+\sum_1^{n_1}\alpha_j-\sum_{n_1+1}^{A}\alpha_j+\sum_1^{l}\theta_j-\sum_{l+1}^{E}\theta_j-\sum_1^{F}\phi_j>0,$$

तथा

$$\varphi_2=\sum_{1}^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{D}\delta_j+\sum_{1}^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{C}\gamma_j+\sum_{1}^{l}\theta_j-\sum_{l+1}^{E}\theta_j-\sum_{1}^{F}\phi_j>0.$$

चिर-प्रतिष्ठित लैपलास के समाकल

$$g(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt \tag{1·2}$$

को परम्परागत संकेत

$$g(p)\doteq h(t)$$

द्वारा प्रदर्शिति किया जावेगा।

सक्सेना [2, ii, p. 181] ने निम्नांकित प्रमेयों को सिद्ध किया है:

(i) यदि $\Phi(p)\doteq f(t)$

तथा $\Psi(\nu, p, \lambda)\doteq K_\nu(\lambda t)f(t)$,

तो $$\int_0^\infty t^{-\nu}(a+bt+ct^2)^{-1}\Phi\left(\frac{a+bt+ct^2}{t}\right)dt=2b^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)^{\nu/2}\Psi(\nu, b, 2\sqrt{(ac)}) \tag{1·3}$$

यदि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों $R(a)>0$, $R(c)>0$ तथा $f(t)$ निराश्रित हो।

(ii) यदि $\Phi(p)\doteq f(t)$

तथा $\Psi(\nu, p, \lambda)\doteq K_\nu(\lambda t)f(t)$,

तो $$\alpha\int_0^\infty \cosh \nu\theta'\,(\alpha+\beta\cosh\theta')^{-1}\Phi(\alpha+\beta\cosh\theta')\,d\theta'=\Psi(\nu, \alpha, \beta), \tag{1·4}$$

यदि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों तथा $R(\beta)>0$.

उपप्रमेय: $\nu=-\frac{1}{2}$, रखने पर हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा

(i) यदि $\Phi(p)\doteq f(t)$

तथा $\Theta(p)\doteq t^{-1/2}f(t)$

तो $$\int_0^\infty t^{1/2}(a+bt+ct^2)^{-1}\Phi\left(\frac{a+bt+ct^2}{t}\right)dt=\sqrt{\frac{\pi}{c}}\,(b+2\sqrt{ac})^{-1}\Theta(b+2\sqrt{ac}), \tag{1·5}$$

यदि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों तथा

(ii) यदि $\Phi(p) \doteq f(t)$

तथा $\Theta(p)) \doteq t^{-1/2} f(t)$,

तो $$\int_0^\infty \cosh\frac{\theta'}{2}\ (q+p\cosh\theta')^{-1}\Phi(q+p\cosh\theta')\ d\theta' = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\ (p+q)^{-1}\Theta(p+p), \tag{1·6}$$

यदि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों तथा $R(p)>0$.

समाकल

$$\int_0^\infty t^{\sigma-\nu}\ (p+qt+rt^2)^{-\sigma-1} \times H^{l+1,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+1,\, [A:C],\, F,\, [B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{ut^h}{(p+qt+rt^2)^h}\\ \\ \dfrac{vt^h}{(p+qt+rt^2)^h}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\sigma+1,\,h),\ (e,\,\theta)\\ (a,\,\alpha);\ (c,\,\gamma)\\ (f,\,\phi)\\ (b,\,\beta);\ (d,\,\delta)\end{matrix}\right.\right] dt$$

$$=\frac{2^{\nu-\sigma}\sqrt{\pi}\, r^\nu}{q^{\sigma+\nu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{q^2-4pr}{4q^2}\right)^s}{\Gamma(s+1)} \times H^{l+2,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+2,\, [A:C],\, F+1,\, [B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{u}{2^h q^h}\\ \\ \dfrac{v}{2^h q^h}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1+\sigma-\nu,\,h),\ (1+\sigma+\nu+2s,\,h),\ (e,\,\theta)\\ (a,\,\alpha);\ (c,\,\gamma)\\ (f,\,\phi),\ \left(\sigma+\frac{3}{2}+s,\ h\right)\\ (b,\,\beta);\ d,\,\delta)\end{matrix}\right.\right] \tag{2·1}$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2>0;\ |\arg u|<\frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v|<\frac{\pi\varphi_2}{2}$,

$R\left(\sigma+1|+h\dfrac{b_i}{\beta_i}+h\dfrac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ 0<R\left(\sigma+h\dfrac{b_i}{\beta_i}+h\dfrac{d_j}{\delta_j}+1\right)>|\ R(\nu)\ |$,

$i=1,\ \ldots,\ m_1,\ j=1,\ \ldots,\ m_2;\ R(q+2\sqrt{pr})>0$,

$$\int_0^\infty t^{\sigma+1/2}\ (p+qt+rt^2)^{-\sigma-1} \times H^{l+1,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+1,\, [A:C],\, F,\, [B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{ut^h}{(p+qt+rt^2)^h}\\ \\ \dfrac{vt^h}{(p+qt+rt^2)^h}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\sigma+1,\,h),\ (e,\,\theta)\\ (a,\,\alpha);\ (c,\,\gamma)\\ (f,\,\phi)\\ (b,\,\beta);\ (d,\,\delta)\end{matrix}\right.\right] dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{r}}\,(q+2\sqrt{(pr)})^{-1/2-\sigma}$$

$$\times H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{u}{(q+2\sqrt{(pr)})^h}\\[2ex] \dfrac{v}{(q+2\sqrt{(pr)})^h}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}+\sigma,\,h),\,(e,\,\theta)\\(a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma)\\(f,\,\phi)\\(b,\,\beta);\,(d,\,\delta)\end{matrix}\right] \qquad (2\cdot 2)$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2\leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2)>0;\ |\arg u|<\frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v|<\frac{\pi\varphi_2}{2},$

$R(p)>0,\ R(q+2\sqrt{(pr)})>0,\ R\left(\sigma+\frac{1}{2}+h\frac{b_i}{\beta_i}+h\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ j=1,\ \ldots,\ m_2;\ i,\ =1,\ldots,\ m_1.$

$$\int_0^\infty \cosh\nu(\theta')(q+p\cosh\theta')^{-1-\sigma}$$

$$\times H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{u}{(q+p\cosh\theta')^h}\\[2ex] \dfrac{v}{(q+p\cosh\theta')^h}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\sigma+1,\,h),\,(e,\,\theta)\\(a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma)\\(f,\,\phi)\\(b,\,\beta);\,(d,\,\delta)\end{matrix}\right]d\theta'$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}p^\nu}{2^{\sigma+1}q^{\sigma+\nu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{q^2-p^2}{4q^2}\right)^s}{\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{l+2,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+2,\,[A:C],\,F+1\,[B:D]}\left[\begin{matrix}\dfrac{u}{2^hq^h}\\[2ex] \dfrac{v}{2^hq^h}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+\sigma-\nu,\,h),\,(\sigma+1+\nu+2s,\,h),\,(e,\,\theta)\\(a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma)\\(f,\,\phi),\,(\sigma+\frac{3}{2}+s,\,h)\\(b,\,\beta);\,(d,\,\delta)\end{matrix}\right] \qquad (2\cdot 3)$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2\leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2>0;\ |\arg u|<\frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v|<\frac{\pi\varphi_2}{2},$

$R(p)>0,\ 0<R\left(\sigma+h\frac{b_i}{\beta_i}+h\frac{d_j}{\delta_j}+1\right)>|\,R(\nu)\,|;\ i=1,\ldots,\ m_1;\ j=1\ \ldots,\ m_2.$

$$\int_0^\infty \cosh\frac{\theta'}{2}\,(q+p\cosh\theta')^{-\sigma-1}$$

$$\times H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{matrix}\overline{(q+p\cosh\theta')^h}\\[2ex] \dfrac{v}{(q+p\cosh\theta')^h}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\sigma+1,\,h),\,(e,\,\theta)\\(a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma)\\(f,\,\phi)\\(b,\,\beta);\,(d,\,\delta)\end{matrix}\right]d\theta'$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2p}\right)}\,(q+p)^{-1/2-\sigma}\; H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{u}{(p+)^h} & (\tfrac{1}{2}+\sigma,\, h),\,(e,\,\theta) \\ & (a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma) \\ \frac{v}{(p+q)^h} & (f,\,\phi) \\ & (b,\,\beta);\,(d,\,\delta) \end{array}\right] \quad (2\cdot4)$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2 > 0;\ |\arg u| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R(p)>0,\ R(p+q)>0,\ R\left(\sigma+\frac{1}{2}+h\,\frac{b_i}{\beta_i}+h\,\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ i=1,\ \ldots,\ m_1;\ j=1,\ \ldots,\ m_2,$$

समाकलों की उपपत्ति

यदि हम

$$f(t)=t^{\sigma}\, H\begin{bmatrix} ut^h \\ vt^h \end{bmatrix},$$

मानें तो सक्सेना[2] तथा एर्डेल्यी [3 p. 331 (28)] के अनुसार हमें

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{p^{\sigma}}\, H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{u}{p^h} & (1+\sigma,\, h),\,(e,\,\theta) \\ & (a,\,\alpha);\ (c,\,\gamma) \\ \frac{v}{p^h} & (f,\,\phi) \\ & (b,\,\beta);\ (d,\,\delta) \end{array}\right]$$

$$=\Phi(p),$$

तथा

$$t^{-1/2} f(t)=t^{\sigma-1/2}\, H\begin{bmatrix} ut^h \\ vt^h \end{bmatrix}$$

$$\doteqdot \frac{1}{p^{\sigma-1/2}}\, H^{l+1,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+1,\,[A:C],\,F,\,[B:D]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{u}{p^h} & (\tfrac{1}{2}+\sigma,\, h),\,(e,\,\theta) \\ & (a,\,\alpha);\,(c,\,\gamma) \\ \frac{v}{p^h} & (f,\,\phi) \\ & (b,\,\beta);\,(d,\,\delta) \end{array}\right]$$

$$=\Theta(p),$$

$$K_{\nu}(\lambda t)\, f(t)=t^{\sigma} K_{\nu}(\lambda t)\; H\begin{bmatrix} ut^h \\ vt^h \end{bmatrix}$$

$$\doteqdot \frac{\sqrt{\pi}\,\lambda^{\nu}}{2^{\sigma+1} p^{\sigma+\nu}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{l+2\, n_1\, ,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+2,\, [A:C],\, F+1,\, [B:D]} \left[\begin{matrix} \dfrac{u}{2^h p^h} \\ \\ \dfrac{v}{2^h p^h} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\sigma-\nu+1,\, h),\, (\sigma+\nu+1+2s,\, h),\, (e,\, \theta) \\ (a,\, \alpha);\, (c,\, \gamma) \\ (f,\, \phi),\, (\sigma+\frac{3}{2}+s,\, h) \\ (b,\, \beta);\, (d,\, \delta) \end{matrix} \right]$$

$$= \Psi(\nu,\, p,\, \lambda)$$

(1·6), (1·3), (1·4) तथा (1·5), के प्रयोग से हमें क्रमशः (2·1), (2·2), (2·3) तथा (2·4) की प्राप्ति होती है।

प्रसार सूत्र

$$(p+2\sqrt{(qr)})^{-1/2-\sigma}\, H^{l+1,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+1,\, [A:C],\, F,\, [B:D]} \left[\begin{matrix} \dfrac{u}{(p+2\sqrt{(qr)})^h} \\ \\ \dfrac{v}{(p+2\sqrt{(qr)})^h} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\frac{1}{2}+\sigma,\, h),\, (e,\, \theta) \\ (a,\, \alpha);\, (c,\, \gamma) \\ (f,\, \phi) \\ (b,\, \beta);\, (d,\, \delta) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{2^{-\sigma-1/2}}{p^{\sigma-1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(1-\dfrac{4qr}{p^2}\right)^s}{2^{2s}\, \Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{l+2,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+2,\, [A:C],\, F+1,\, [B:D]} \left[\begin{matrix} \dfrac{n}{2^h p^h} \\ \\ \dfrac{v}{2^h p^h} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\frac{3}{2}+\sigma,\, h),\, (\frac{1}{2}+\sigma+2s,\, h,\, (e,\, \theta) \\ (a,\, \alpha);\, (c,\, \gamma) \\ (f,\, \phi),\, (\sigma+s+\frac{3}{2},\, h) \\ (b,\, \beta),\, (d,\, \delta) \end{matrix} \right] \qquad (3·1)$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2, > 0;\ |\arg u| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v| < \frac{\pi\varphi_2}{2},$

$$R\left(1+\sigma+h\frac{b_i}{\beta_i}+h\frac{d_j}{\delta_j}\right) > 0,\ i=1,\ \ldots,\ m_1;\ j=1,\ \ldots,\ m_2;$$

$$R(q)>0,\ R(r)>0,\ R(p+2\sqrt{(qr)}>0.$$

$$(q+p)^{-1/2-\sigma}\, H^{l+1,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E+1,\, [A:C],\, F,\, [B:D]} \left[\begin{matrix} \dfrac{u}{(p+q)^h} \\ \\ \dfrac{v}{(p+q)^n} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\frac{1}{2}+\sigma,\, a),\, (e,\, \theta) \\ (a,\, \alpha);\, (c,\, \gamma) \\ (f,\, \phi) \\ (b,\, \beta);\, (d,\, \delta) \end{matrix} \right]$$

$$=\frac{q^{1/2-\sigma}}{2^{\sigma+1/2}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{p^2}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{l+2,\,n_1,\,n_2,\,m_1,\,m_2}_{E+2,\,[A:C],\,F+1,\,[B:D]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{u}{2^h q^h} & (\frac{3}{2}+\sigma,\,h)(\sigma+\frac{1}{2}+2s,\,h)(e,\,\theta) \\ & (a,\,\alpha);\ (c,\,\gamma) \\ \frac{v}{2^h q^h} & (f,\,\phi),\ (\sigma+\frac{3}{2}+s,\,h) \\ & (b,\,\beta);\ (d,\,\delta) \end{array}\right] \tag{3·2}$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2 > 0;\ |\arg u| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg v| < \frac{\pi\varphi_2}{2}$,

$$R\left(\sigma+\frac{3}{2}+h\frac{b_i}{\beta_i}+h\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ i=1,\ \ldots,\ m_1;\ j=1,\ \ldots,\ m_2,$$

$R(p)>0,\ R(p+q)>0$. (2·1) (2·2) (2·3) तथा (2·4) में दिये गये फलों से सरलतापूर्वक सूत्र (3·1) तथा (3·2) प्राप्त होते हैं।

विशिष्ट दशायें

मोदी[4] द्वारा दिये गये ऐपेल फलनों तथा सार्वीकृत H-फलन के लिये दिये गये सम्बन्धों के आधार पर हम (2·1) और (3·1) फलों से निम्नांकित नवीन समाकलों को सरलतापूर्वक प्राप्त कर सकते हैं

$$\int_0^{\infty} t^{\sigma-\nu}(p+qt+rt^2)^{-1-\sigma}\,F_1\left(1+\sigma;\ a,\ c;f;\ \frac{-ut}{(qt+p+rt^2)},\ \frac{-vt}{(p+qt+rt^2)}\right)dt$$

$$=\frac{2^{\nu-\sigma}\sqrt{\pi}\,r^{\nu}\,\Gamma(f)}{q^{\sigma+\nu}\,\Gamma(1+\sigma)\,\Gamma(a)\,\Gamma(c)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{2,\,1,\,1,\,1,\,1}_{2,\,[1:1],\,2,\,[1:1]}\left[\begin{array}{c|c} \frac{u}{2q} & (1+\sigma-\nu,\,1),\ (1+\sigma+\nu+2s,\,1) \\ & (1-a,\,1);\ (1-c,\,1) \\ \frac{v}{2q} & (\sigma+\frac{3}{2}+s,\,1),\ (f,\,1) \\ & (0,\,1);\ (0,\,1) \end{array}\right] \tag{4·1}$$

जहाँ $|u|+|v|<1,\ R(p)>0,\ R(r)>0$ तथा $|\,0<R(\sigma+1)>|\,R(\nu)\,|$.

$$\int_3^{\infty} t^{\sigma-\nu}\,(p+qt+rt^2)^{-1-\sigma}\,F_2\left(1+\sigma;\ a,\ c:b,\ d;\ \frac{-ut}{p+qt+rt^2},\ \frac{-vt}{p+qt+rt^2}\right)dt$$

$$=\frac{2^{\nu-\sigma}\sqrt{\pi}\,r^{\nu}\,\Gamma(b)\,\Gamma(d)}{q^{\sigma+\nu}\,\Gamma(a)\,\Gamma(c)\,\Gamma(1+\sigma)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{2,\,1,\,1,\,1,\,1}_{2,\,[1\,:\,1],\,1,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{array}{c|c}\frac{u}{2q} & (1+\sigma-\nu,\,1),\,(1+\sigma+\nu+2s,\,1)\\ & (1-a,\,1);\,(1-c,\,1)\\ & (\sigma+\frac{3}{2}+s,\,1)\\ \frac{v}{2q} & (0,\,1),\,(1-b,\,1);\,(0,\,1),\,(1-d,\,1)\end{array}\right] \quad (4{\cdot}2)$$

जहाँ $|v|+|u|<1,\ R(p)>0,\ R(r)>0,$ तथा $0<R(\sigma+1)>|R(\nu)|$.

$$\int_0^{\infty} t^{\sigma-\nu}\,(p+qt+rt^2)^{-1-\sigma}\,F_4\left(1+\sigma,\,e;\,b,\,d;\,\frac{-ut}{p+qt+rt^2},\ \frac{-vt}{p+qt+rt^2}\right)dt$$

$$=\frac{2^{\nu-\sigma}\sqrt{\pi}\,\Gamma(b)\,\Gamma(d)\,r^{\nu}}{q^{\sigma+\nu}\,\Gamma(1+\sigma)\,\Gamma(e)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{3,\,0,\,0,\,1,\,1}_{3,\,[0\,:\,0],\,1,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{array}{c|c}\frac{u}{2q} & (1+\sigma-\nu,\,1),\,(1+\sigma+\nu+2s,\,1),\,(e,\,1)\\ & \text{---}\\ & (\sigma+\frac{3}{2}+s,\,1)\\ \frac{v}{2q} & (0,\,1),\,(1-b,\,1);\,(0,\,1),\,(1-d,\,1)\end{array}\right] \quad (4{\cdot}3)$$

जहाँ $|u|^{1/2}+|v|^{1/2}<1,\ R(p)>0,\ R(r)>0,$ तथा $0<R(\sigma+1)>|R(\nu)|$

$$F_1\left(\frac{1}{2}+\sigma;\,a,\,c;\,f;\ \frac{u}{q+2\sqrt{pr}},\ \frac{-v}{q+2\sqrt{pr}}\right)$$

$$=\frac{2^{-1/2-\sigma}\,\Gamma(f)\,(q+2\sqrt{pr})^{1/2+\sigma}}{q^{\sigma-1/2}\,\Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)\,\Gamma(a)\,\Gamma(c)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\,\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{2,\,1,\,1,\,1,\,1}_{2,\,[1\,:\,1],\,2,\,[1\,:\,1]}\left[\begin{array}{c|c}\frac{u}{2q} & (\frac{3}{2}+\sigma,\,1),\,(\frac{1}{2}+\sigma+2s,\,1)\\ & (1-a,\,1);\,(1-c,\,1)\\ \frac{v}{2q} & (\sigma+\frac{3}{2}+s,\,1),\,(f,\,1)\\ & (0,\,1);\,(0,\,1)\end{array}\right] \quad (4{\cdot}4)$$

जहाँ $\left|\frac{u}{q+2\sqrt{pr}}\right|<1, \left|\frac{v}{q+2\sqrt{pr}}\right|<1, R(q+2\sqrt{pr})>0, R(p)>0, R(r)>0.$

$$F_2\left(\frac{1}{2}+\sigma; a, c; b, d; \frac{-u}{q+2\sqrt{pr}}, \frac{-v}{q+2\sqrt{pr}}\right)$$

$$=\frac{2^{-1/2-\sigma}\Gamma(d)\Gamma(b)(q+2\sqrt{pr})^{1/2-\sigma}}{q^{\sigma-1/2}\Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)\Gamma(a)\Gamma(c)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{2,\,1,\,1,\,1,\,1}_{2.\,[1\,:\,1],\,1,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{matrix}\frac{u}{2q}\\ \\ \frac{v}{2q}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{3}{2}+\sigma, 1), (\frac{1}{2}+\sigma+2s, 1)\\ (1-a, 1); (1-c, 1)\\ (\sigma+\frac{3}{2}+s, 1)\\ (0, 1), (1-b, 1); (0, 1), (1-d, 1)\end{matrix}\right.\right] \quad (4\cdot5)$$

जहाँ $\left|\frac{u}{q+2\sqrt{pr}}\right|+\left|\frac{v}{q+2\sqrt{pr}}\right|<1, R(p)>0, R(r)>0,$ तथा $R(q+2\sqrt{pr})>0.$

$$F_4\left(\frac{1}{2}+\sigma, e; b, d; \frac{-u}{(q+2\sqrt{pr})}, \frac{-v}{(q+2\sqrt{pr})}\right)$$

$$=\frac{2^{-1/2-\sigma}\Gamma(d)\Gamma(b)\,(q+2\sqrt{pr})^{-1/2+\sigma}}{q^{\sigma-1/2}+\sigma\,\Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)\Gamma(e)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4pr}{q^2}\right)^s}{2^{2s}\Gamma(s+1)}$$

$$\times H^{3,\,0,\,0,\,1,\,1}_{3,\,[0\,:\,0],\,1,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{matrix}\frac{u}{2q}\\ \\ \frac{v}{2q}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{3}{2}+\sigma, 1), (\frac{1}{2}+\sigma+2s, 1), (e, 1)\\ --\\ (\sigma+\frac{3}{2}+s, 1)\\ (0, 1), (1-b, 1); (0, 1), (1-d, 1)\end{matrix}\right.\right] \quad (4\cdot6)$$

जहाँ $\left|\frac{u}{q+2\sqrt{pr}}\right|^{1/2}+\left|\frac{v}{q+2\sqrt{pr}}\right|^{1/2}<1, R(p)>0, R(r)>0,$ तथा $Re\,(q+2\sqrt{pr})>0.$

इसी प्रकार के फल (2·2), (2·3), (2·4) तथा (3·2) से भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय प्रो० आर० एस० कुशवाहा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में प्रोत्साहन दिया।

निर्देश

1. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. de. Tuc. Rev. 1971 Ser. A. **21**, 67-84

2. (i) सक्सेना, आर० के०, Univ. Nac. de, Tuc. Rev. 1971 Ser. **A. 21**, 185-191

   (ii) वही, Math. Annalen, 1964, **154**, 181-184

3. एडर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, **भाग I, मैकग्राहिल** 1953

4. मोदी, जी० सी०, **याकोहामा मैथ० जर्न०**, 1973 (**प्रकाशनाधीन**)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Pages 197-200

हाइपरज्यामितीय फलनों वाले परिमित संकलन

बी० एम० अग्रवाल तथा आर० सी० मांगलिक
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—अप्रैल 9, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य अन्तर आपरेटरों, $\triangle$ तथा E, का उपयोग करते हुये कतिपय तत्समिकायें प्राप्त करना है जो n पदों का अन्तर प्रदान करें। अत्यन्त सरल तत्समिकाओं से प्रारम्भ करके इस प्रकार के फलों को सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

Abstract

Finite summations involving hypergeometric functions. *By* B.M. Agarwal and R. C. Manglik, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.

The object of this paper is to obtain certain identities giving the difference of n terms, using difference operators $\triangle$ and E. It is interesting to note that starting with very simple identities how such type of important results can be derived.

ऐसे अनेक फल पाये जाते हैं जो गास श्रेणी के प्रथम n पदों के योग को अपरिमित ${}_3F_2$ (1)श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं। ये फल हिल (1907, 1908) तथा व्हिपल (1930) के हैं। रामानुजम ने भी एक तत्समिका प्रदान की थी जिसकी उपपत्ति डार्लिंग (1931) तथा वाटसन (1930) द्वारा दी गई। बैली (1931) तथा हाडकिन्सन ने भी वाट्सन के फल [1, p. 81] के विभिन्न सार्वीकरण दिये हैं। हाल ही में अग्रवाल[2] ने अन्तर आपरेटरों के व्यवहार द्वारा ${}_4F_3$ (1) का एक नवीन रूपान्तरण प्रस्तुत किया है,

$$\frac{\Gamma(e-a)\Gamma(e-b)}{\Gamma e\Gamma(e-a-b)}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+n-1, & -m+1, & a, & b\\ v, & e, & 1+a+b-e-m+n\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(e-a+m-n)\Gamma(e-b+m-n)}{\Gamma(e+m-n)\Gamma(e-a-b+m-n)}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+m-1, & -n+1, & a, & b\\ v, & e+m-n, & 1-e+a+b\end{matrix}\right] \quad (1\cdot1)$$

इससे बैली का फल [1, p. 81] विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया जा सकता है,

2. हम [3, p. 20] को

$$\triangle f(a)=f(a+1)-f(a) \tag{2·1}$$

$$\triangle^n f(a)=\triangle[\triangle^{n-1}f(a)] \tag{2·2}$$

तथा

$$E^r f(a)=f(a+r) \tag{2·3}$$

परिभाषित करेंगे जिससे

$$E-1\equiv\triangle \tag{2·4}$$

हमने प्रमेय [3, 2. 51, p 34],

$$\triangle^n\{f_1(a)\}f_2(a)\}-\Sigma\binom{n}{r}\triangle^{n-r}f_1(a+r)\cdot\triangle^r f_2(a). \tag{2·5}$$

का तथा सुपरिचित रूपान्तरण

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, a, c; \\ b, d\end{matrix}\, 1\right]=\frac{(d-c)_n}{(d)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, c, b-a \\ b, 1-d+c-n\end{matrix}; 1\right] \tag{2·6}$$

का भी प्रयोग किया है ।

3.

$$\triangle\left(\frac{\Gamma a}{\Gamma b}\right)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)}-\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}=(-1)\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b+1)}\,(b-a) \tag{3·1}$$

पर विचार करें जिसमें a तथा b a के फलन हैं । पुनरावृत्ति करने पर हमें

$$\triangle^n\left(\frac{\Gamma a}{\Gamma b}\right)=(-1)^n\frac{\Gamma a}{\Gamma b}\cdot\frac{(b-a)_n}{(b)_n} \tag{3·2}$$

प्राप्त होगा ।

इसी तरह (2·5) का उपयोग करते हुये दिखा सकते हैं कि

$$\triangle^n\left(\frac{\Gamma a}{\Gamma b}\frac{\Gamma c}{\Gamma d}\right)=(-1)^n\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\frac{\Gamma a}{\Gamma b}\frac{\Gamma c}{\Gamma d}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, a, d-c \\ d, 1-b+a-n\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

4. हम निम्नांकित फलों को सिद्ध करेंगे

$$(1+a)_2F_1\left[\begin{matrix}d-b, d-a-1 \\ 1+d\end{matrix}\right]_n-(1+b)_2F_1\left[\begin{matrix}d-b-1, d-a \\ 1+d\end{matrix}\right]_n=\frac{(a-b)}{n!}\frac{(d-b)_n(d-a)_n}{(1+d)_n} \tag{4·1}$$

$$a\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}d-c, d-a-1 \\ d\end{matrix}\right]_n-(a+c-d)\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}d-c, d-a \\ d\end{matrix}\right]_n=\frac{d+n-c}{n!}\frac{(d-c)_n(d-a)_n}{(d)_n} \tag{4·2}$$

$$d\cdot {}_2F_1\begin{bmatrix} d-c,\ d-a \\ d \end{bmatrix}_n-(a-d+c-1)\ {}_2F_1\begin{bmatrix} d-c+1,\ d-a+1 \\ d+1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{2d-c-a+n+1}{n!}\cdot\frac{(d-c+1)_n(d-a+1)_n}{(d+1)_n} \qquad (4\cdot3)$$

जहाँ प्रत्यय n से यह सूचित होता है कि F श्रेणी के केवल प्रथम n पद ही प्रसार में सम्मिलित किये जाते हैं।

5. **उपपत्ति :**

फल (4·1) को सिद्ध करने के लिये निम्नांकित तत्समक पर विचार करें

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)}-\frac{\Gamma(a)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(d)}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)}\ (a-c) \qquad (5\cdot1)$$

(5·1) में बाईं ओर (3·3) को और दाहिनी ओर आपरेटर $(F-1)^n$ को व्यवहृत करने पर

$$\frac{(b-a-1)_n}{(b)_n}\cdot a\cdot {}_3F_2\begin{bmatrix} -n,\ a+1,\ d-c \\ d,\ 2-b+a-n \end{bmatrix}-\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\cdot c\cdot {}_3F_2\begin{bmatrix} -n,\ a,\ d-c \\ d,\ 1-b+a-n \end{bmatrix}$$

$$=(a-c)\ {}_3F_2\begin{bmatrix} -n,\ a,\ c \\ b,\ d \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा। अब (5·2) में बाईं ओर (2·6) का उपयोग करने पर तथा $b-a+d-c=1-n$ रखने पर उसका दायाँ पक्ष सालशुट्ज का ${}_3F_2$ (1) बन जाता है। अतः फल (4·1) प्राप्त हुआ।

इसी प्रकार

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)}-\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c)}{\Gamma(b+1)\Gamma(d)}\ (a-b) \qquad (5\cdot3)$$

तथा

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c)}{\Gamma(b+1)\Gamma(d)}-\frac{\Gamma(a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(d+1)}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c)}{\Gamma(b+1)\Gamma(d+1)}\ (d-b) \qquad (5\cdot4)$$

तत्समकों से प्रारम्भ करने पर फल (4·2) तथा (4·3) प्राप्त किये जा सकते हैं।

6. फल (4·2) तथा (4·1) को समाप्य ${}_2F_1$ (1) श्रेणियों के दो संलग्न फलनों के अन्तर के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। ये क्रमशः इस प्रकार हैं

$$(l-p)F(p-)_n(l-p-q)F_n=\frac{(q+n)}{n!}\ \frac{(q)_n(p)_n}{(l)_n} \qquad (6\cdot1)$$

तथा

$$(l-p)F(p-)_n-(l-q)F(q-)_n=\frac{(q-p)}{n!}\ \frac{(q)_n(p)_n}{(l)_n} \qquad (6\cdot2)$$

जहाँ $$F_n={}_2F_1\begin{bmatrix} q,\ p \\ l \end{bmatrix}_n$$

यहीं नहीं, फल (4·3) को निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है :

$$l \cdot F_n-(l-p-q-1)F(p+,q+;l+)_n=\frac{q+p+n+1}{n!}\frac{(p+1)_n(q+1)_n}{(l+1)_n}. \qquad (6\cdot3)$$

निर्देश

1. स्लेटर, एल० जे०, Generalized Hypergeometric Functions, कैम्ब्रिज, 1966.
2. अग्रवाल, बी० एम०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका** 1973, **16**, 169.
3. मिल्ने-थामसन, एल० एम०, The Calculus of Finite Differences, **मैकमिलन कम्पनी,** 1933.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July 1974, Pages 201-205

व्हिटेकर फलन श्रेणी वाले द्वैत श्रेणी सम्बन्ध

आर० के० सक्सेना तथा पी० एल० सेठी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 24, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में निम्नांकित द्वैत श्रेणी सम्बन्धों का हल प्राप्त किया गया है :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{[\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)]^2\Gamma(\frac{1}{2}-k+n)}{[\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)]^2\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda+n)} W_{k,n}(x)=f(x);\ 0<x<y \tag{1}$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)} W_{k,n}(x)=g(x);\ y<x<\infty \tag{2}$$

जहाँ $W_{k,n}(x)$ व्हिटेकर फलन है, $\lambda>0$, $R(k+\lambda)<\frac{1}{2}-|Re\ n|$ $f(x)$ तथा $g(x)$ संस्तुत फलन हैं। इस निर्मेय को अज्ञात गुणांक A_n ज्ञात करने जैसे समानीत करके इसका हल प्रात करते हैं।

Abstract

On dual series relations involving series of Whittaker functions *By* R. K. Saxena* and P. L. Sethi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In the present paper, the solution of the following dual series relations will be obtained.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{[\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)]^2\Gamma(\frac{1}{2}-k+n)}{[\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)]^2\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda+n)} W_{k,n}(x)=f(x);\ 0<x<y, \tag{1}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)} W_{k,n}(x)=g(x);\ y<x<\infty \tag{2}$$

*गणित विभाग, सुलेमानिया विश्वविद्यालय, ईराक़

where $W_{k,n}(x)$ is a Whittaker's functions, $\lambda>0$, $R(k+\lambda(<\frac{1}{2}-| Re\ n |$, $f(x)$ and $g(x)$ are prescribed functions. The solution is obtained by reducing the problem to that of finding the unknown coefficient A_n.

1. पिछले दशक में विभिन्न कार्यकर्ताओं[1, 2, 5, 6, 9-18] ने फूरियर-बेसिल, डिनी श्रेणी, त्रिकोणमितीय श्रेणी, जैकोबी बहुपदियों तथा लागेर बहुपदियों की श्रेणियों के सम्बन्ध में शोधकार्य किया है। यहाँ हम नोबेल[8] द्वारा प्रस्तावित विधि का प्रयोग करेंगे।

गणनाओं को सरल बनाने के लिये अज्ञात गुणांक A_n को गोल्डस्टाइन[4] द्वारा प्राप्त ह्विटकर फलनों के लाम्बिक गुण का सदुपयोग करते हुये निर्धारित करते हैं। हल सर्वथा नवीन है।

2. आगे हमें निम्नांकित फलों की आवश्यकता पड़ेगी :

$W_{k,m}(x)$ द्वारा ह्विटेकर फल सूचित होता है जिसकी परिभाषा निम्नांकित [(19), p. 346] द्वारा दी जाती है :

$$W_{k,m}(z)=\sum_{m,-m}\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\,M_{k,m}(z), \tag{3}$$

जहाँ संकेत $\sum_{m,-m}$ से सूचित होता है कि इस व्यंजक के बाद एक ऐसा ही m के स्थान पर $-m$ से युक्त व्यंजक जुड़ जावेगा और [(19), p. 337]

$$M_{k,m}(z)=z^{m+1/2}e^{-1/2}\ z=\left\{1+\frac{\frac{1}{2}-k+m}{1!\,(2m+1)}z+\frac{(\frac{1}{2}-k+m)(\frac{3}{2}-k+m)}{2!\,(2m+1)(2m+2)}\,z^2+\dots\right\}, \tag{4}$$

गोल्डस्टाइन[4] द्वारा दिया गया ह्विटेकर फलन के लिये लाम्बिक फलन

$$\int_0^\infty W_{s+m+1/2,m}(t)\ W_{r=m+1/2,n}(t)\ \frac{dt}{t}=\Gamma(2m+s+1)\Gamma(s+1)\,\delta_{mn},\ m>-\tfrac{1}{2} \tag{5}$$

होगा जहाँ δ_{mn} क्रोनेकर डेल्टा है।

निम्नांकित फलों [3, pp. 405 (21), 221 (72)] की भी आवश्यकता होगी।

$$\int_0^u x^{-k-\lambda-1}(u-x)^{\lambda-1}\,e^{1/2x}\,W_{k,n}(x)\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda+n)\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)}{u^{k+1}\,\Gamma(\frac{1}{2}-k+n)\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)}\,W_{k+\lambda,n}(u), \tag{6}$$

जहाँ $Re\ \lambda>0$, $R(k+\lambda)<\frac{1}{2}-|Re\ n|$

तथा $$\int_0^\infty x^{n-1/2}\,e^{1/2x}\,(x-u)^{\lambda-1}\,W_{k,n}(x)\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-n)} u^{1/2\lambda+n-1/2} e^{1/2u} W_{k+1/2\lambda,\ n+1/2\lambda}(u), \tag{7}$$

जहाँ $0<Re\ \lambda<\frac{1}{2}-Re(k+n), \ |\arg(u)|<\frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{d^\lambda}{du^\lambda}[e^{u/2} u^{-n-1/2} W_{k+\lambda,n}(u)]$$

$$=(-1)^\lambda \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n-k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+n-k-\lambda)} e^{u/2} u^{-n-k/2-\lambda/2-1/2} W_{k+1/2\lambda,\ n+1/2\lambda}(u), \tag{8}$$

3. **द्वैत श्रेणी समीकरणों का हल :** समीकरण (1) तथा (2) को क्रमशः $x^{-k-\lambda-1}(u-x)^{\lambda-1} e^{1/2x}$ तथा $x^{n-1/2} e^{1/2x}(x-y)^{\lambda-1}$ से गुणा करने पर, तथा क्रमशः $(0, u)$ और (μ, ∞) में x के प्रति समाकलित करने पर और फिर (6) तथा (7) के बल पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k-\lambda-n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+n)} W_{k+\lambda,n}(u)$$

$$=\frac{u^{-k-1}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^u x^{-k-\lambda-1}(u-x)^{\lambda-1} e^{1/2x} f(x)\,dx, \tag{9}$$

प्राप्त होगा जहाँ $0<u<b,\ Re>0,\ R(k+\lambda)<\frac{1}{2}-|Re\ n|$

तथा $$\sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n W_{k+1/2\lambda,n+1/2\lambda}(u)$$

$$=\frac{u^{1/2-1/2\lambda}}{\Gamma(\lambda)} e^{-1/2u}\int_0^\infty x^{n-1/2} e^{1/2x}(u-x)^{\lambda-1} g(x)\,dx, \tag{10}$$

जहाँ $b<u<\infty,\ 0<Re<\frac{1}{2}-Re(k+n),\ |\arg(u)|<\frac{3\pi}{2}$.

अब (9) को $e^{u/2} u^{n-1/2}$ से गुणा करने पर तथा (8) को व्यवहृत करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n A_n W_{k+1/2\lambda,n+1/2\lambda}(u)=\frac{(-1)^\lambda e^{-u/2} u^{-k/2+\lambda/2-1/2}}{\Gamma(\lambda)}$$

$$\frac{d^\lambda}{du^\lambda}\int_0^u x^{-k-\lambda-1}(u-x)^{\lambda-1} e^{1/2x} f(x)\,dx,\ 0<u<b, \tag{11}$$

अब चूंकि (10) तथा (11) सर्वसम हैं अतः (5) को व्यवहृत करने से (1) तथा (2) का हल निम्नांकित रूप में मिलता है :

$$A_n = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(k-n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\lambda+k+\frac{1}{2})}\Big[(-1)^{\lambda}\int_0^b e^{-1/2u}\, a^{k/2-n+1/2\lambda-3/2}$$

$$\times W_{k+1/2\lambda, n+1/2\lambda}\,(u)F(v)\,du + \int_b^{\infty} e^{-1/2u}\, u^{-1/2\lambda-n-1/2}\, W_{k+1/2\lambda, n+1/2\lambda}\,(u)G(u)\,du\Big], \quad (12)$$

जहाँ
$$F(u) = \frac{d^{\lambda}}{du^{\lambda}}\int_0^u x^{-k-\lambda-1}(u-x)^{\lambda-1}\, e^{1/2x} f(x)\, dx \quad (13)$$

तथा
$$G(u) = \int_0^{\infty} x^{n-1/2}\, e^{1/2x}\, (x-u)^{\lambda-1}\, g(x)\, dx, \quad (14)$$

4. **विशिष्ट दशा** : यदि $k=0$ रखें और सूत्र

$$W_{0,n}(z) = z^{1/2}\, \pi^{-1/2}\, k_n\,(z)$$

का प्रयोग करें तो द्वैत श्रेणी समीकरण का हल

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \frac{[\Gamma(\frac{1}{2}-n)]^2\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{[\Gamma(\frac{1}{2}-n-\lambda)]^2\Gamma(\frac{1}{2}+n+\lambda)}\, A_n K_n\left(\frac{x}{2}\right) = f(x); \quad 0<x<b, \quad (15)$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n-\lambda)}\, A_n K_n\left(\frac{x}{2}\right) = g(x);\ b<x<\infty, \quad (16)$$

को निम्नांकित द्वारा प्रकट करेंगे

$$A_n = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}\Big[(-1)^{\lambda}\int_0^b e^{-1/2u}\, u^{-n+1/2\lambda-3/2}$$

$$\times W_{1/2\lambda, n+1/2\lambda}(u)F(u)\,du + \int_b^{\infty} e^{-1/2u}\, u^{-1/2\lambda-n-1/2}\, W_{1/2\lambda, n+1/2\lambda}(u)G(u)\,du\Big], \quad (17)$$

जहाँ
$$F(u) = \frac{d^{\lambda}}{du^{\lambda}}\int_0^u x^{-\lambda-1}\,(u-x)^{\lambda-1}\, e^{1/2x} f(x)\, dx, \quad (18)$$

तथा
$$G(u) = \int_u^{\infty} x^{n-1/2}\, e^{1/2x}\, (x-u)^{\lambda-1}\, g(x)\, dx, \quad (19)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० आर० के० एस० कुशवाहा के आभारी हैं जिन्होने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि दिखाई ।

निर्देश

1. कोलिन्स, डब्लू० डी०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिलास० सोसा०**, 1961, **57**, 367-384.

2. कुक, जे० सी० तथा ट्रैंटर जे० सी०, **क्वार्ट० जर्न० मेकै०**, 1959, **12**, 379-84.

3. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms. भाग II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

4. गोल्डस्टाइन, एस०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, **34**, 103-125.

5. लांडीस, जे० एस०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1965, **25**, 123-27.

6. वही, **प्रोसी० एडिनबरा मैथ० सोसा०**, 1969, **16**, 273-80.

7. मैग्नस, डब्लू०, ओबेरहेटिंगर, एफ० तथा सोनी, आर० पी०, Formulas and theorems for the special Functions of Mathematical Physics, Springer Verlag, **न्यूयार्क**, 1966.

8. नोबेल, बी० आई०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1963, **59**, 363-72.

9. स्नेडान, आई० एन० तथा श्रीवास्तव, आर० पी०, **प्रोसी० रायल सोसा० एडिन०** भाग A, 1964, **66**, 150-60.

10. श्रीवास्तव, एच० एम०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1969, **30**, 525-27.

11. श्रीवास्तव, के० एम०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1966, **17**, 796-802.

12. वही, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1966, **19**, 529-533.

13 श्रीवास्तव, आर० पी०, **प्रोसी० रायल० सोसा० एडिन०**, भाग A, 1964, **66**, 161-72.

14. श्रीवास्तव,आर० पी०, **वही** पृ० 173-84.

15. वही, **वही**, पृ० 185-191.

16. ट्रैंटर, सी० जे०, **प्रोसी० ग्लासगो मैथ० एसोशि०**, 1959, **4**, 49-57.

17. वही, **वही**, 1960, **4**, 198-200.

18. वही, **वही**, 1964, **6**, 136-40.

19. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाटसन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis (**कैम्ब्रिज** 1962).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July 1974, Pages 207-213

ऐपेल फलनों तथा फाक्स के H-फलन के गुणनफल वाले समाकल

एस० के० वशिष्ट
गणित विभाग, वनस्थली विद्यापीठ, राजस्थान

[प्राप्त—अप्रैल 23, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में ऐपेल फलनों तथा एक चर वाले H-फलन के गुणनफलों वाले 4 नये समाकलों का मूल्यांकन किया गया है । मुख्य समाकलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में कुछ समाकल प्राप्त किये गये हैं ।

Abstract

Integral involving products of Appell functions and Fox's H-function. *By* S. K. Vasishta, Mathematics Department, Banasthali Vidyapith, Rajasthan.

In this paper, we evaluate four new integrals involving products of Appell functions and the H-function of one variable. Certain integrals involving Jacobi polynomial, Bessel functions with the Appell functions have been obtained as particular cases of our main integrals.

1. मुख्य समाकल

प्रस्तुत शोधपत्र में निम्नांकित समाकलों का मूल्यांकन किया जावेगा:

प्रथम समाकल:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\delta-\alpha-\beta-1} F_4\left(1+\alpha, 1+\alpha+\beta, 1+\gamma, 1+\alpha; \frac{2t}{x+1}; \frac{x-1}{x+1}\right) \times H_{p, q}^{m, n}\left[z(1+x)^{\sigma} \middle| \begin{matrix} (aj, \alpha_j)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix}\right] dx$$

$$=2^{\delta-\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\gamma)_r\, r!}\,\Gamma(\alpha+r+1)\, t^r$$

$$\times H_{p+2,\ q+2}^{m,\ n+2}\left[2^{\sigma}z\,\middle|\,\begin{matrix}(-\delta,\sigma),\ (\beta-\delta;\sigma),\ (a_j,\alpha_j)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q},\ (\beta+r-\delta,\sigma),\ (-1-\alpha-r-\delta,\sigma)\end{matrix}\right] \quad (1\cdot1)$$

(1·1) में $H_{p,q}^{m,n}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]$ से H-फलन [5, p. 594] का बोध होता है और इसे $H_{p,q}^{m,n}\left[x\right]$ द्वारा सर्वत्र सूचित किया जावेगा। $F_4\ (x, y)$ ऐपेल फलन के लिये प्रयुक्त हुआ है। $a_j,\alpha_j)_{1,p}$ से $(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)$ का तथा $(a)_n$ से $a(a+1)\ldots(a+n-1)$ का बोध होता है जहाँ n धन पूर्णांक है। समाकल (1·1) निम्नांकित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है:

$$A=\sum_{1}^{n}(\alpha_j)-\sum_{n+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{m}(\beta_j)-\sum_{m+1}^{q}(\beta_j)>0,\ |\arg z|<(\tfrac{1}{2})A\pi,\ |t|<1,\ \sigma>0,$$

$$Re(\alpha)>-1,\ Re(\delta)>-1,\ Re\left(\delta-\alpha-\beta+\sigma\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0\ (j=1,\ldots,m).$$

द्वितीय समाकल:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta-\beta}\ F_2\left((1+\alpha,-\beta,\delta',1+\alpha,\lambda,\frac{1-x}{2},\ \frac{1+x}{2}t\right)H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right]dx$$

$$=2^{\alpha-\beta+\delta+1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\delta')_r}{(\lambda)_r\, r!}\,\Gamma(\alpha+r+1)\, t^r$$

$$\times H_{p+2,\ q+2}^{m,\ n+2}\left[2^{\sigma}z\,\middle|\,\begin{matrix}(-\delta,\sigma),\ (\beta-\delta-r,\sigma),\ (a_j,\alpha_j)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q},\ (\beta-\delta,\sigma),\ (-1-\alpha-r-\delta,\sigma)\end{matrix}\right] \quad (1\cdot2)$$

जहाँ $\sigma>0,\ A>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi,\ Re(\alpha)>-1,\ Re(\delta)>-1,\ Re\left(\delta-\beta+1+\sigma\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$ $(j=1,\ldots,m), |t|<1$ तथा $F_2\ (x, y)$ ऐपेल फलन [4, p. 224] के लिये प्रयुक्त हैं।

तृतीय समाकल:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta-\beta}[1+t(1+x)]^{-1-\alpha}F_2\ (1+\alpha,\lambda-\tfrac{1}{2},-\beta,2\lambda-1,1+\alpha,$$

$$\times\frac{2(1+x)t}{\{1+(1+x)t\}},\ \frac{1-x}{2\{1+(1+x)t\}}\ H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right]dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{2r}2^{\alpha-\beta+\delta+1}}{r!\,(\lambda)_r}\Gamma(\alpha+2r+1)\;H_{p+2,\;q+2}^{m,\;n+2}\left[2^{\sigma}z\left|\begin{matrix}(-\delta,\sigma),(\beta-2r-\delta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(\beta-\delta,\sigma),\\(-1-\alpha-\delta-2r,\sigma)\end{matrix}\right.\right]\tag{1·3}$$

जहाँ $\sigma>0, A>0, |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi, Re\,(\alpha)>-1, Re\,(\delta)>-1, |t|<\frac{1}{2}\;Re\left(\delta-\beta+1+\sigma\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0\;(j=1,\ldots,m)$.

चतुर्थ समाकल:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta}\;F_4\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\;\frac{\alpha+\beta+2}{2},1+\alpha,1+\beta,\;\frac{(1-x)(1-y)t}{(1+t)^2},\right.$$
$$\left.\times\frac{(1+x)(1+y)t}{(1+t)^2}\right)H_{p,\;q}^{m,\;n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right]dx$$

$$=2^{\alpha+\delta+1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1+t)^{\alpha+\beta+1}(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\alpha)_r\,(1+\beta)_r}P_r^{(\alpha,\;\beta)}(y)\Gamma(\alpha+r+1)\,t^r$$

$$\times H_{p+2,\;q+2}^{m,\;n+2}\left[2^{\sigma}z\left|\begin{matrix}(-\delta,\sigma),(\beta-\delta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(\beta+r-\delta,\sigma),(-1-\alpha-r-\delta,\sigma)\end{matrix}\right.\right]\tag{1·4}$$

जहाँ $\sigma>0, A>0, |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi, Re\,(\alpha)>-1, Re\,(\delta)>1, |t|<1,\;Re\left(\delta+1+\sigma\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$
$(j=1,\ldots,m)$.

समाकलों की उपपत्तियाँ

(1·1) की उपपत्ति:

हमें ज्ञात है [6, p. 431] कि

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\gamma)_r}\;P_r^{(\alpha,\;\beta)}(x)\,t^r=\left(\frac{x+}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}\quad F_4\left(1+\alpha,\;1+\alpha+\beta,1+\gamma,\right.$$
$$\left.1+\alpha,\frac{2t}{x+1},\frac{x-1}{x+1}\right)\tag{1·5}$$

जहाँ $-1<x<1, |t|<1$.

(1·5) में दोनों ओर

$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta}\;H_{p,\;q}^{m,\;n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right]$ से गुणा करने पर तथा -1 से 1 की सीमाओं में x के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta-1-\alpha-\beta} F_4\left(1+\alpha,\ 1+\alpha+\beta,\ 1+\gamma,\ 1+\alpha,\ \frac{2t}{x+1},\ \frac{x-1}{x+1}\right) H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right] dx$$

$$=2^{-\alpha-\beta-1} \int_{-1}^{1} \left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\gamma)_r} P_r^{(\alpha,\,\beta)}(x)\, t^r\right\} (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\delta}\, H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right] dx \tag{1·6}$$

(1·6) में दाईं ओर समाकल तथा संकलन के क्रम को उलट देने से और इस प्रकार से प्राप्त समाकल का मान ज्ञात फल [2. p. 697] की सहायता से निकालने पर

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\delta}\, P_r^{(\alpha,\,\beta)}(x)\, H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right] dx$$

$$=\frac{2^{\alpha+\delta+1}\,\Gamma(\alpha+r+1)}{r!}\, H_{p+2,\,q+2}^{m,\,n+2}\left[2^{\sigma} z \,\middle|\, \begin{matrix} (-\delta,\,\sigma),\ (\beta-\delta,\,\sigma),\ (a_j,\,\alpha_j)_{1,\,p} \\ (b_j,\,\beta_j)_{1,\,q},\ (\beta+r-\delta,\,\sigma)(-1-\alpha-\delta-r,\,\sigma) \end{matrix}\right]$$

हमें वांछित फल (1·1) प्राप्त होता है।

(1·6) के दाहिनी ओर के समाकल तथा संकलन के क्रम में परिवर्तन विहित है [3, p. 500] क्योंकि

(i) $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\gamma)_r} P_{r,}^{(\alpha,\,\beta)}(x)\, t^r$ स्थिर अन्तराल $(0,\ t)$ में $|t|<1$ के लिये एकसमान अभिसारी है।

(ii) $(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\delta}\, H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(1+x)^{\sigma}\right]$ अन्तराल $(-1,\ 1)$ [5, p. 594] में x का वैश्लेषिक फलन है।

(iii) (1·1) में वर्णित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (1·6) के बाईं ओर का समाकल पूर्णतया अभिसारी है।

इससे (1·1) की उपपत्ति पूर्ण हुई।

(1·2) से लेकर (1·4) तक की उपपत्तियाँ :

(1·2) (1·3) तथा (1·4) को सिद्ध करने के लिये (1·1) की विधि का अनुगमन करते हैं जिसमें इतना ही अन्तर है कि (1·5) के बजाय निम्नांकित [8, p. 1043-1047; 1, p. 102] फलों का सदुपयोग करते हैं :

$$(1+x)^{-\beta} F_2\left(1+\alpha,\ -\beta,\ \delta',\ 1+\alpha,\ \lambda,\ \frac{1-x}{2},\ \frac{1+x}{2}\right)=2^{-\beta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta')_r}{(\lambda)_r} P_r^{(\alpha,\,\beta-r)}(x)\, t^r \tag{1·7}$$

$$(1+x)^{-\beta}\,[1+t(1+x)]^{-\alpha-1}\,F_2\left(1+\alpha,\,\lambda-\tfrac{1}{2},\,-\beta,\,2\lambda-1,\,1+\alpha,\,\frac{2(1+x)t}{1+t(1+x)},\right.$$

$$\left.\frac{1-x}{2\{1+t(1+x)\}}\right)=2^{-\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2r!}{r!\,(\lambda)_r}\,P_{2r}^{(\alpha,\,\beta-2r)}(x)\,t^{2r} \tag{1·8}$$

$$(1+t)^{-\alpha-\beta-1}\,F_4\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\,\frac{\alpha+\beta+2}{2},\,1+\alpha,\,1+\beta,\,\frac{(1-x)(1-y)t}{(1+t)^2},\,\frac{(1+x)(1+y)t}{(1+t)^2}\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r!\,(1+\alpha+\beta)_r}{(1+\alpha)_r(1+\beta)_r}\,P_r^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,P_r^{(\alpha,\,\beta)}(y)\,t^r \tag{1·9}$$

2. विशिष्ट दशायें

(1·1) से (1·4) तक फलों की महत्ता इसमें है कि H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई नवीन और रोचक समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं जिनमें विभिन्न तर्कों के द्वारा विशिष्ट फलनों के गुणनफल रहते हैं। स्थानाभाव के कारण केवल कुछ ही को अंकित किया जा रहा है।

(1·1) की विशिष्ट दशायें

(i) (1·1) में $m=1$, $n=p=q=2$, $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=\sigma=1$, $a_1=1-a$, $a_2=1$, $b_1=0$, $b_2=1-c$ रखने से तथा उसमें [5, p. 598, 4, p. 215] फलों के प्रयुक्त करने पर

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\delta-1-\alpha-\beta}\,F_4\left(1+\alpha,\,1+\alpha+\beta,\,1+\gamma,\,1+\alpha,\,\frac{2t}{x+1},\,\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,z(1+x))\,dx$$

$$=2^{\delta-\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_r\,\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\beta+\delta)\,t^r}{(1+\gamma)_r\,r!\,\Gamma(1+\delta-\beta-r)\Gamma(2+\alpha+r+\delta)}$$

$$\times\,{}_4F_3\,(a,\,b,\,1+\delta,\,1-\beta+\delta;\,c,\,1-\beta+\delta-r,\,2+\alpha+r+\delta;\,2z) \tag{2·1}$$

जहाँ $Re\,(\alpha)>-1$, $Re\,(\delta)>-1$, $Re\,(\delta-\alpha-\beta)>0$, $|\,t\,|<1$.

(ii) (2·1) $z=\frac{1}{2}$, $a=-s$, $b=1+\alpha+\delta+s$, $c=1+\delta$ रखने पर तथा फल [4, p. 188; 7, p. 254] का उपयोग करते हुये कुछ सरलीकरण के अनन्तर

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\delta-1-\alpha-\beta}\,F_4\left(1+\alpha,\,1+\alpha+\beta,\,1+\gamma,\,1+\alpha,\,\frac{2t}{x+1},\,\frac{x-1}{x+1}\right)P_s^{(\alpha,\,\delta)}(x)\,dx$$

$$=\frac{2^{\delta-\beta}\,t^s\,\Gamma(1+\delta+s)\Gamma(1+\alpha+s)(1+\alpha+\beta)_{2s}}{s!\,(1+\gamma)_s\,\Gamma(2+\alpha+\delta+2s)}$$

$$\times\,{}_3F_2\,(1+\alpha+s,\,1+\alpha+\beta+2s,\,\beta-\delta;\,1+\gamma+s,\,\alpha+2+\delta+2s;\,-t) \tag{2·2}$$

(iii) (1·1) में $m=1,\ n=p=0,\ q=2,\ \beta_1=\beta_2=\sigma=1,\ b_1=\frac{\nu}{2},\ b_2=-\frac{\nu}{2}$ रखने पर तथा z के स्थान पर $\frac{z^2}{8}$ तथा x के स्थान पर $2x^2-1$ रखने पर और फल [5, p. 598; 4, p. 208] को व्यवहृत करने पर

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\alpha}\, x^{2\delta-2\alpha-2\beta-1}\, F_4\left(1+\alpha,\ 1+\alpha+\beta,\ 1+\gamma,\ 1+\alpha,\ \frac{t}{x^2},\ \frac{x^2-1}{x^2}\right) \mathcal{J}_{\nu}\,(zx)\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_r\,\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\delta)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\beta+\delta)\ t^r}{r!\ (1+\gamma)_r\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\beta-r+\delta)\Gamma(2+\frac{1}{2}\nu+\alpha+r+\delta)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}$$

$$\times\,{}_2F_3\left(1+\tfrac{1}{2}\nu+\delta,\ 1+\tfrac{1}{2}\nu-\beta+\delta;\ 1+\nu,\ 1+\tfrac{1}{2}\nu-\beta-r+\delta,\ 2+\tfrac{1}{2}\nu+\alpha+r+\delta;\ \frac{-z^2}{4}\right) \tag{2·3}$$

जहाँ $Re\ (\alpha)>-1,\ Re\ (2\delta-2\alpha-2\beta+\nu-1)>0,\ |\ t\ |<1.$

(iv) (2·3) में $\nu=\beta$ तथा $\delta=\frac{\beta}{2}$ मानने पर और दाहनी ओर के सरलीकरण के फलस्वरूप हमें निम्नांकित फल प्राप्त होता है

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\alpha}\, x^{-2\alpha-\beta-1}\, F_4\left(1+\alpha,\ 1+\alpha+\beta,\ 1+\gamma,\ 1+\alpha,\ \frac{t}{x^2},\ \frac{x^2-1}{x^2}\right) \mathcal{J}_{\beta}\,(zx)\,dx$$

$$=\frac{2^{\alpha}}{z^{\alpha+1}}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_r\,\Gamma(\alpha+r+1)(-1)^r}{r!\ (1+\gamma)_r}\,\mathcal{J}_{\alpha+\beta+2r+1}\,(z) \tag{2·4}$$

जहाँ $Re\ (\alpha)>-1,\ Re\ (\alpha)<-\frac{1}{2},\ |\ t\ |<1.$

यदि हम (1·1) की भाँति (1·2), (1·3) तथा (1·4) द्वारा प्रदर्शित समाकलों में H-फलन के प्राचलों का विशिष्टीकरण करें तो इसी प्रकार के कई अन्य समाकल प्राप्त होंगे जिन्हें स्थानाभाव के कारण यहाँ नहीं दिया जा रहा है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० शर्मा तथा डा० एस० पी० गोयल दोनों का आभारी है जिन्होंने मार्ग दर्शन किया तथा आवश्यक सुझाव दिये।

निर्देश

1. वैली, डब्लू० एन०, Generalized Hypergeometric Series, 1935.
2. बाजपेयी, एस० डी०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1969, **65**, 697-701.
3. ब्रामविच, टी० जे० ई० ए०, An Introduction to the Theory of Infinite Series, 1956.

4. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Trancendental Functions, **भाग** I, 1953.

5. गुप्ता, के० सी० तथा जैन० यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया,** 1966, **36**, 594-609.

6. मनोचा, एच० एल० तथा शर्मा, बी० एल०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०,** 1967, **63**, 431-33.

7. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, 1963.

8. शर्मा, बी० एल०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1967, **63**, 1041-47.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Pages 215-220

सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की प्राप्यता पर फास्फोरस का प्रभाव

शिव गोपाल मिश्र तथा प्रेम चन्द्र मिश्र
रासायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 5, 1973]

सारांश

सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की प्राप्यता पर नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटाश उर्वरकों के प्रभाव पर चल रहे कार्य को आगे बढ़ाते हुये हमने उत्तर प्रदेश की दो मिट्टियों (लाल तथा काली) में 8 विभिन्न फास्फोरस स्रोतों का प्रभाव मैंगनीज़ एवं जिंक की प्राप्यता पर देखा। यह पाया गया कि जिंक की प्राप्यता घटाने में फास्फोरस के जल विलेय स्रोत अविलेय स्रोतों की अपेक्षा अधिक प्रभावकारी हैं। फास्फोरस के लौह एवं ऐल्यूमिनियम फास्फेट स्रोतों का जिंक की प्राप्यता पर न्यूनतम प्रभाव देखा गया।

मैंगनीज़ की प्राप्यता यद्यपि सभी फास्फेट स्रोतों के प्रयोग से बढ़ी (लाल मिट्टी में पोटैसियम डाइ हाइड्रोजन फास्फेट एवं ऐल्यूमिनियम फास्फेट के अतिरिक्त), किन्तु लौह फास्फेट के प्रयोग से दोनों ही मिट्टियों में मैंगनीज़ की प्राप्यता में विशेष वृद्धि हुई।

Abstract

Effect of phosphates on the availability of micronutrients in soils. *By* S. G. Misra and P. C. Mishra, Department of Chemistry, Allahabad University, Allahabad.

In continuation to our previous studies regarding the availability of micronutrients as affected by NPK fertilisers, eight different phosphate sources were tried in order to assess the availability of Mn and Zn in two soils (black and red soils) of Uttar Pradesh. It has been observed that soluble phosphates are more effective in reducing Zn-availability. The two insoluble sources-$FePO_4$ and $AlPO_4$ were least effective.

The availability of Mn in both the soils has been found to increase considerably as a result of $FePO_4$ addition though other sources also increase the availability (exception being KH_2PO_4 and $AlPO_4$ in red soil).

मिट्टियों में उपस्थित सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की प्राप्य मात्रा में काफी भिन्नता पाई जाती है। तत्वों की प्राप्य मात्रा एवं कुल मात्रा में किसी प्रकार का सम्बन्ध नहीं पाया जाता। मृदा पी-एच, कार्बनिक पदार्थ, चूने की मात्रा, विनिमेय धनायन तथा स्थूल आवश्यक तत्व (विशेषकर फास्फोरस) जैसे अनेक मृदा-कारक सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की प्राप्यता को प्रभावित करते हैं। थार्न[1] ने अपने समीक्षात्मक लेख में यह स्पष्ट किया है कि जिंक की प्राप्यता को मृदा पी-एच एवं फास्फोरस स्तर प्रभावित करते हैं। मिश्र एवं मिश्र[2] को फास्फोरस के प्रयोग से मैंगनीज़ की प्राप्यता में वृद्धि प्राप्त हुई।

फास्फोरस के विभिन्न स्रोतों का लाल तथा काली मिट्टियों में जिंक तथा मैंगनीज़ की प्राप्यता पर प्रभाव ज्ञात करने के उद्देश्य से प्रस्तुत अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त दो मिट्टियाँ (काली तथा लाल) क्रमशः इलाहाबाद तथा मिर्जापुर जिले के बिरहा एवं खन्तरा ग्रामों से एकत्र की गई थीं। अध्ययन में प्रयुक्त करने के पूर्व मिट्टियों के नमूनों को सावधानीपूर्वक पीसकर छाना गया और फिर सुखा लिया गया। इन मिट्टियों के कतिपय रासायनिक गुण, जिनका निश्चयन मानक विधियों द्वारा किया गया, सारणी 1 में दिये गये हैं। मैंगनीज़ एवं जिंक का निश्चयन क्रमशः पाइपर[3] तथा वियत्स, बोन एवं नेल्सन[4] द्वारा बताई गई रंगमापी विधियों द्वारा किया गया।

सारणी 1

प्रयुक्त मिट्टियों के कतिपय रासायनिक गुण

मिट्टियाँ	पी-एच	चूना %	कार्बनिक पदार्थ %	धनायन विनिमय क्षमता $m.e/100$ ग्रा०	जिंक (भाग/दसलाख अंश)		मैंगनीज (भाग/दसलाख अंश)	
					सम्पूर्ण	अम्ल विलय	सम्पूर्ण	अम्ल विलेय
लाल	6·4	0·87	2·76	24·0	42·40	6·20	425·0	235·0
काली	7·8	2·62	0·43	32·6	63·50	5·20	900·0	240·0

मैंगनीज़ एवं जिंक की प्राप्यता पर फास्फोरस का प्रभाव ज्ञात करने के लिये दोनों मिट्टियों के 5 ग्राम नमूने को फास्फोरस के विभिन्न स्रोतों की तीन मात्राओं (50, 100 तथा 150 भाग/दस लाख भाग फास्फोरस) से उपचारित किया गया। ये फास्फोरस स्रोत थे: फास्फोरिक अम्ल, पोटैसियम फास्फेट, अमोनियम फास्फेट, मोनोकैल्सियम फास्फेट, पोटैसियम मेटा फास्फेट, डाइकैल्सियम फास्फेट, फेरिक

फास्फेट एवं ऐल्यूमिनियम फास्फेट। प्रथम चार फास्फेट स्रोत विलयन रूप में डाले गये जबकि अन्य स्रोत ठोस रूप में डाले गये। इस प्रकार से उपचारित नमूने, नियंत्रण नमूनों सहित, 90 दिन तक बारी-बारी से नम किये गये एवं सुखाये गये। इस अवधि के पश्चात् प्रत्येक नमूने में जल एवं अम्ल विलेय (0·1 नार्मल हाइड्रोक्लोरिक अम्ल) मैंगनीज़ एवं जिंक की मात्रायें ज्ञात की गईं। प्राप्त परिणाम सारणी 2 में दिये गये हैं।

परिणाम एवं विवेचना

सारणी 2 में दिये गये परिणामों से यह स्पष्ट है कि मिट्टी में फास्फोरस मिलाने से (फास्फोरस का स्रोत चाहे कोई भी हो) जिंक की प्राप्यता में कमी और मैंगनीज़ की प्राप्यता में वृद्धि होती है। यह देखा गया कि फास्फोरिक अम्ल प्रयुक्त करने पर जल विलेय जिंक तथा मैंगनीज दोनों में वृद्धि हुई। यह वृद्धि फास्फोरिक अम्ल की अम्लता के कारण होती है। अन्य फास्फोरस स्रोत जल-विलेय मैंगनीज़ एवं जिंक की मात्रा पर विशेष प्रभाव नहीं डालते। केवल मोनो एवं डाई कैल्सियम फास्फेट कहीं-कहीं मैंगनीज़ की जल-विलेय मात्रा में वृद्धि करते हैं। ऐसा सम्भवतः अत्यन्त कम विलेय मैंगनीज़-फास्फेट बनने के कारण होता है।

अविलेय फास्फोरस स्रोतों में से लौह-फास्फेट की बढ़ती हुई मात्रा डालने से लाल तथा काली दोनों मिट्टियों में अम्ल विलेय मैंगनीज़ की मात्रा में वृद्धि होती है। यह वृद्धि काली तथा लाल मिट्टी में क्रमशः 32·6 से 81·4 प्रतिशत तथा 20·4 से 47·9 प्रतिशत है। पोटैसियम डाइहाइड्रोजन फास्फेट एवं ऐल्यूमिनियम फास्फेट मैंगनीज़ की प्राप्यता बढ़ाने में न्यूनतम प्रभाव दिखाते हैं। कहीं-कहीं इन स्रोतों के प्रयोग से मैंगनीज़ की प्राप्यता में ह्रास देखा गया। यह कमी 15·5 प्रतिशत तक पाई गई। यह कमी पोटैसियम डाइहाइड्रोजन फास्फेट में पोटैसियम की उपस्थिति के कारण हो सकती है। ऐसे ही परिणाम इसके पूर्व भी मिश्र एवं मिश्र[5] को मिल चुके हैं।

परिणामों के विवेचन से यह भी स्पष्ट होता है कि फास्फोरस चाहे जिस स्रोत से मिट्टी में पहुँचे, अम्ल-विलेय जिंक की मात्रा में ह्रास होता है। काली मिट्टी में मोनो कैल्सियम फास्फेट तथा लाल मिट्टी में पोटैसियम डाइहाइड्रोजन फास्फेट एवं पोटैसियम मेटाफास्फेट अम्ल विलेय जिंक घटाने में सर्वाधिक प्रभावकारी पाये गये। सामान्यतः फास्फोरस के विलेय स्रोत अविलेय स्रोतों की अपेक्षा जिंक को अविलेय बनाने में अधिक प्रभावकारी रहे। ये परिणाम इस धारणा की पुष्टि करते हैं कि जिंक फास्फोरस से क्रिया करके अविलेय जिंक फास्फोरस संकर बनाता है जिससे जिंक प्राप्यता घट जाती है। फास्फोरस के अविलेय स्रोतों में से लोह फास्फेट तथा ऐल्यूमिनियम फास्फेट जिंक की विलेयता पर न्यूनतम प्रभाव डालते हैं। जिंक की विलेयता में सर्वाधिक कमी काली मिट्टी में मोनो-कैल्सियम-फास्फेट के प्रयोग से (68·2% कमी) तथा लाल मिट्टी में पोटैसियम मेटाफास्फेट के प्रयोग से (72·7% कमी) पाई गई। ये परिणाम थार्न[1] तथा सीएट्ज, स्टर्जेस एवं क्रैमर[6] द्वारा प्राप्त परिणामों की पुष्टि करते हैं। भिन्न-भिन्न फास्फोरस स्रोतों का भिन्न-भिन्न प्रभाव सम्भवतः उनमें उपस्थित धनायनों के कारण है।

सारणी 2

मैंगनीज़ तथा जिंक के निष्कर्षण पर

फास्फोरस स्रोत (भाग/दसलाख भाग)	काली मिट्टी मैंगनीज़ (भाग/दसलाख भाग)			जिंक (भाग/दसलाख भाग)		
	जल विलेय	अम्ल विलेय	घटोत्तरी/बढ़ोत्तरी प्रतिशत	जल विलेय	अम्ल विलेय	घटोत्तरी/बढ़ोत्तरी प्रतिशत
नियंत्रण	—	215·0	—	0·06	4·60	—
50, H_3PO_4	85·5	115·0	−6·7	—	3·80	−18·8
100 ,, ,,	137·5	115·0	+17·4	1·25	3·60	+ 4·1
150 ,, ,,	228·5	125·0	+64·4	1·20	3·16	− 6·4
50 KH_2PO_4	—	300·0	+40·0	—	4·04	−13·3
100 ,, ,,	—	270·5	+25·8	—	3·72	−20·2
150 ,, ,,	—	235·0	+ 9·6	—	3·40	−27·0
150 $NH_4H_2PO_4$	—	285·0	+32·6	0·06	3·16	−30·9
100 ,, ,, ,,	—	305·0	+44·2	0·08	2·84	−37·3
150 ,, ,, ,,	—	315·0	+46·5	—	2·84	−39·1
50 KPO_3	—	270·0	+28·6	—	3·40	−27·0
100 ,,	—	287·5	+33·7	0·02	3·04	−36·5
150 ,,	—	295·0	+41·9	—	2·68	−42·5
50 $Ca(H_2PO_4)_2$	—	260·0	+20·9	0·03	3·0)	−33·9
100 ,, ,,	2·50	270·5	+27·0	0·06	2·84	−37·8
150 ,, ,,	3·00	285·5	+34·2	0·06	1·42	−68·2
50 $CaHPO_4$	1·8	295·0	+38·0	—	3·84	−17·6
100 ,,	1·8	310·0	+45·0	—	3·62	−21·9
150 ,,	2·5	345·0	+61·6	—	2·08	−55·4
50 $FePO_4$	—	285·0	+32·6	—	4·50	− 3·4
100 ,,	—	350·0	+62·8	—	4·52	− 3·0
150 ,,	—	390·0	+81·4	—	4·68	+ 0·4
500 $AlPO_4$	—	270·0	+25·6	—	4·60	− 1·3
100 ,,	—	232·0	+ 7·9	—	4·44	− 4·7
150 ,,	—	222·5	+ 3·5	—	4·42	− 5·1

फास्फोरस का प्रभाव

लाल मिट्टी

मैंगनीज़ (भाग/दसलाख भाग)			जिंक (भाग/दसलाख भाग)		
जल विलेय	अम्ल विलेय	घटोत्तरी/बढ़ोत्तरी प्रतिशत	जल विलेय	अम्ल विलेय	घटोत्तरी/बढ़ोत्तरी प्रतिशत
1·60	235·0	—	0·14	6·60	—
11·50	160·0	—27·5	1·50	3·00	—33·2
195·00	120·0	+33·1	1·98	2·60	—32·4
255·00	78·0	+40·8	2·88	1·80	—29·3
—	220·0	— 7·0	0·12	3·00	—53·7
—	205·0	—13·3	—	2·40	—64·4
—	200·0	—15·5	—	2·60	—61·4
—	225·0	— 4·9	0·14	5·16	—21·4
—	245·0	+ 3·6	0·10	4·88	—26·1
—	260·0	+ 9·9	—	3·56	—47·2
—	250·0	+ 5·7	—	4·00	—40·6
—	235·0	— 0·6	—	2·60	—61·4
—	235·0	— 0·6	—	1·80	—72·7
1·80	240·0	+ 2·2	0·08	4·01	—39·3
1·80	260·0	+10·6	0·04	4·68	—30·0
—	274·0	+15·8	—	3·00	—55·5
1·71	230·0	— 2·0	0·05	4·60	—31·0
—	250·0	+ 5·7	—	4·28	—36·5
—	250·0	+ 5·7	—	4·36	—35·3
—	285·0	+20·4	—	6·52	— 3·2
—	290·0	+22·6	—	6·20	— 8·0
—	350·0	+47·9	—	6·36	— 5·6
—	225·0	— 4·9	—	6·44	— 4·5
—	208·0	—12·1	—	6·44	— 4·5
—	200·0	—15·5	—	6·36	— 5·6

\+ =नियंत्रण के ऊपर बढ़ोत्तरी

— =नियंत्रण से घटोत्तरी

फास्फोरिक अम्ल का फास्फोरस स्रोत के रूप में प्रयोग करने पर दोनों ही मिट्टियों में एक ओर जल-विलेय मैंगनीज़ तथा जिंक की मात्रा में वृद्धि हुई किन्तु दूसरी ओर अम्ल-विलेय मैंगनीज़ तथा जिंक की मात्रा में कमी आई। इससे स्पष्ट होता है कि फास्फोरिक अम्ल के अम्लीय प्रभाव के कारण मृदा-पी-एच में कमी आती है और अम्ल-विलेय मैंगनीज़ तथा जिंक जल-विलेय अवस्था में परिवर्तित हो जाते हैं। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि चूने के ऊपर अधिशोषित मैंगनीज़ तथा जिंक को अम्लता उत्पन्न करके जल-विलेय बनाया जा सकता है।

प्रस्तुत अध्ययन से ज्ञात होता है कि फास्फोरस डालने से लाल मिट्टी में जिंक की प्राप्यता में स्पष्ट कमी आई जबकि काली मिट्टी में मैंगनीज़ की प्राप्यता में वृद्धि अधिक स्पष्ट है।

निर्देश

1. थार्न, डब्ल्यू०, **एडवान्सेज एग्रो०**, 1957, **9**, 31-65.
2. मिश्र, एस० जी० तथा मिश्र, पी० सी०, **प्रोसी० नेशनल इन्स्टी० साइंस**, 1968, **35**(3), 406-413.
3. पाइपर, सी० एस०, Soil and Plant Analysis, **यूनिवर्सिटी आफ ऐडिलेड, आस्ट्रेलिया**, 1944
4. वियत्स, एफ० जी०, बोन, एल० सी० तथा नेल्सन, सी० ई०, **एग्रो० जर्न०**, 1953, **45**, 559-565.
5. मिश्र, एस० जी० तथा मिश्र, पी० सी०, **जर्न० इन्डियन सोसा० स्वायल साइंस**, 1968, **16**, 173-178.
6. सियट्ज, एल० एफ०, स्टर्जेस, ए० जे० तथा क्रैमर, सी०, **एग्रो० जर्न०**, 1959, **51**, 457-459.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No 3, July 1974, Pages 221-223

0-हाइड्राक्सी-4-बैन्जामिडोथायोसेमीकार्बाज़ाइड के क्रोमियम(III) संकर में सहसंयोजकता पैरामीटर का परिकलन

महीपाल स्वामी, प्रकाश चन्द्र जैन एवं अनन्त कुमार श्रीवास्तव
रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त—मई 23, 1974]

सारांश

उत्कृष्ट कोलेटीकारक अभिकर्मक 0-हाइड्रॉक्सी-4-बेन्जामिडोथायोसेमीकार्बाज़ाइड के क्रोमियम (III) संकर के इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रमीय आँकड़ों की सहायता से राका अन्तर इलेक्ट्रॉनिक प्रतिकर्षण प्राचलों, B_{35} तथा B_{55}, की गणना की गई है। इनसे सहसंयोजकता प्राचल परिकलित किया गया है।

Abstract

Calculation of covalency parameter in a chromium(III) complex of 0-hydroxy-4-benzamidothiosemicarbazide. *By* M. P. Swami, P. C. Jain & A. K. Srivastava, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The electronic spectral data on a chromium (III) complex of 0-hydroxy-4-benzamidothiosemicarbazide, a prominent chelating reagent, have been interpretted to evaluate the values of Racah interelectronic repulsion parameter B_{35} & B_{55}. These values have been utilized to calculate the covalency parameter.

धातुओं के *d*-कक्षकों की विपाटन ऊर्जा सामान्यतः लिगैंड क्षेत्र प्रभाव तथा संक्रमग धातुओं के संकरों में बन्धन के प्रकार के विवेचन से सम्बन्धित है। लिगैंड क्षेत्र सिद्धान्त यह प्रागुक्ति करता है कि विपाटन ऊर्जा किस प्रकार धातु आयन तथा दाता अणु की प्रकृति पर निर्भर करती है, परन्तु राका अन्तर इलेक्ट्रॉनिक प्राचल *B* तथा *C* के परिमाणों के आंकड़ों का अभी अभाव है। इसी अभाव की आंशिक पूर्ति के लिये प्रस्तुत शोध पत्र में 0-हाइड्रॉक्सी-4-बेन्जामिडोथायोसेमिकार्बाज़ाइड (OH-BTSC) के क्रोमियम (III) संकर के स्पेक्ट्रमीय आँकड़ों का निर्वचन किया गया है। OH-BTSC एक उत्कृष्ट

कीलेटीकारक के रूप में स्थापित किया जा चुका है[1-6] । इस कीलेटीकारक के क्रोमियम (III) संकर को हम वियोजित करके अभिलक्षित कर चुके हैं[1] ।

संकर [Cr(O-BTSC)$_2$]Cl के इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम में चार बैंड क्रमशः 13600, 17420; 27400 तथा 34500 सेमी०$^{-1}$ पर प्रगट होते हैं। इनमें से प्रथम बैंड स्पिन वर्जित है जो कि $4_{A2g} \rightarrow 2_{Eg}$ संक्रमण के कारण है। पहला स्पिन अनुमत बैंड (ν_1) 17420 सेमी०$^{-1}$ पर $4_{A_2g} \rightarrow 4_{T_2g(F)}$ के संक्रमण द्वारा निर्दिष्ट है और यह सीधे ही $10D_q$ के मान के संगत है। 27400 सेमी०$^{-1}$ (ν_2) तथा 34500 सेमी०$^{-1}$ (ν_3) बैंडों को क्रमशः $4_{A2g} \rightarrow 4_{T1g(F)}$ तथा $4_{A_2g} \rightarrow 4_{T1g(P)}$ संक्रमणों से निर्दिष्ट किया जा सकता है।

निम्न समीकरण[7] में ν_2 अथा ν_3 का मान रखने पर B_{35} का मान प्राप्त होता है।

$$B_{35} = \frac{\nu_2 + \nu_3 - 3\nu_1}{15}$$

B_{35} का मान 641 सेमी०$^{-1}$ आता है जबकि स्वतंत्र गैसीय क्रोमियम (III) आयन के लिये यह 1031 सेमी०$^{-1}$ है। स्पिन-वर्जित बैंड की सहायता से B_{55} का मान

$$E(4_{A_2g} \rightarrow 2_{Eg}) = 9\ B_{55} + 3C - 50B_{55}^2/10D_q$$

समीकरण द्वारा प्राप्त होता है।

इस समीकरण में $B = 4C$ मानकर B_{55} के मान की गणना की गई है तो 718 सेमी०$^{-1}$ प्राप्त होता है।

$$\beta = \text{B संकर}/\bar{B_0}\ (\text{स्वतंत्र गैसीय आयन})$$

उपर्युक्त सम्बन्ध की सहायता से β_{55} तथा β_{35} निष्पत्ति क्रमशः 0·69 तथा 0·62 प्राप्त होती है। β_{55} का मान (0·69) इकाई से पर्याप्त कम है जो धातु तथा लिगैंड कक्षकों में π-प्रकार के संघट्टनों का द्योतक है। β_{35} का और अधिक कम मान इसमें π-तथा σ-प्रकार के अस्थानीकरण की ओर इंगित करता है क्योंकि B_{35} मान दोनों प्रबल क्षेत्र विन्यासों $t^3_{2g}\, e_g$ तथा t^3_{2g} से प्राप्त होता है। इससे यह अभिप्राय निकलता है कि धातु कक्षकों $\pi(t_{2g})$ तथा $\sigma(e_g)$ का विभेदक विस्तार होता है जो कि β_{35} तथा β_{55} के अन्तर का फलन है। इस अन्तर को सहसंयोजकता प्राचल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$1 - \epsilon = \beta_{35}/\beta_{55} = \frac{0{\cdot}62}{0{\cdot}69} = 0{\cdot}89$$

संकर में बन्धन B_{35} तथा B_{55} के अन्तर को फलन के सदृश्य माना गया है।

निर्देश

1. स्वामी, एम० पी०, जैन, पी० सी०, श्रीवास्तव, ए० के०, **रोजनिक केम० एन० सोसा० किम० पोलोनुरम** (प्रेस में)
2. वही, **करेन्ट, साइंस**, 1973, **42**, 199
3. स्वामी, एम० पी०, रस्तोगी, डी० के०, जैन, पी० सी० तथा श्रीवास्तव, ए० के०, **इसराइल ज० केमि०**, 1971, **9**, 653
4. वही, **एक्टा किम० हन्गेरिका** (प्रेस में)
5. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1972, **15**, 117
6. वही, **वही**, 1972, **15**, 161
7. फिगिस, बी० एन०, **इन्ट्रोडक्शन टू लिगेंड फील्ड्स, इन्टरसाइन्स न्यूयार्क**, 1967, 52
8. पेह्मारेड्डी, जे० आर०, **जेड० नेचूर फोरसंग**, 1967, **22**, 908
9. जोरगेन्सन, सी० के०, **प्रोग० इनओर्ग केमि०**, 1962, **4**,73
10. फोरेस्टर, एल० एस०, **ट्रांजीशन मेटल केमि०**, 1969, **5**,1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 3, July, 1974, Pages, 225-233

कागज वर्णलेखिकी में क्लोरोफार्मी विलायकों की निस्यन्दक पत्र में से प्रवाह गति पर इनके भौतिक गुणों के प्रभाव का अध्ययन

रा० प्र० भटनागर तथा कृष्णदत्त शर्मा
रसायन अध्ययन शाला, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—फरवरी 14, 1974]

सारांश

निस्यन्दक पत्र में शुद्ध क्लोरोफार्म एवं मिश्रित क्लोरोफार्म-मेथेनॉल विलायकों की प्रवाह गति का अध्ययन आरोही कागज वर्णलेखिकी प्रविधि द्वारा किया गया है। इस अध्ययन द्वारा व्हाटमैन नम्बर 1 निस्यन्दक पत्र के संदर्भ में मुलर एवं क्लेग द्वारा दिये गए सम्बन्ध, $h^2=Dt-b$ की उपयोगिता का परीक्षण क्लोरोफार्मी विलायकों के लिए किया गया है। इस सम्बन्ध में प्रयुक्त वितरण गुणांक, D तथा स्थिरांक b के मान प्रयोगात्मक आँकड़ों से मूल्यांकित किए गए हैं। परन्तु विसरण गुणांक का मान विलायकों के भौतिक गुणों के आधार पर समीकरण $D=a\,\gamma/\eta \cdot d+b$ के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ a एवं b निस्यन्दक पत्र पर निर्भर स्थिरांक, γ, η तथा d विलायक के पृष्ठ तनाव, श्यानता तथा घनत्व हैं। अतः क्लोरोफार्मी विलायकों के प्रयोगात्मक भौतिक गुणों के मानों का उपयोग करके उपर्युक्त सम्बन्ध का भी परीक्षण किया गया है। इस समीकरण में प्रयुक्त भौतिक गुणों के मान ताप पर निर्भर हैं अतः ताप परिवर्तन से इनके मानों में परिवर्तन होना अनिवार्य है। इसी कारण इस सम्बन्ध को रूपान्तरित करना आवश्यक प्रतीत हुआ। रूपान्तरण में γ एवं η के स्थान पर क्रमशः पैराकोर एवं रेयोकोर जैसे प्रयोगात्मक और रचनात्मक गुणधर्मों का प्रयोग कर नवीन सम्बन्ध $D=a'[P]/[R]+b'$ प्रस्तावित किया गया है तथा उसकी उपयोगिता भी दर्शाई गई है।

Abstract

Studies of the effect of physical properties of chloroformic solvents on the rate of flow through filter paper in paper chromatography. *By* R. P. Bhatnagar and Krishna Dutt Sharma, School of Studies in Chemistry, Jiwaji University, Gwalior.

The studies have been made for the rate of flow of pure chloroform and mixed chloroform-methanol solvent through filter paper by ascending paper chromato-

graphic technique. The usefulness of Muller and Clegg relationship, $h^2=Dt-b$ has been examined by these studies with Whatman No. 1 filter paper. The values of distribution coefficient, D, and the constant, b, in the relationship have been evaluated by using experimental data obtained from these studies. But the values of distribution coefficient change with the physical properties of the solvent system according to the equation $D=a\ \gamma/\eta \cdot d+b$ where a and b are constants depending on the filter paper, γ, η and d are surface tension, viscosity and density of the solvent system. Therefore by using the experimental values of physical properties of chloroformic solvents, this relationship has also been tested. The physical properties used in the equation are temperature-dependent, hence their change with temperature is obvious. The modification of this relationship thus appeared to be essential. By replacing γ, η and d with additive and constitutive properties as parachor and rheochor, a new relationship $D=a'(P)/(R)+b'$ is proposed and its usefulness demonstrated.

कागज वर्णलेखिकी में R_f मान निस्यन्दक पत्र द्वारा विलायक के प्रवाह वेग पर निर्भर रहता है तथा वह प्रवाह वेग का व्युत्क्रमानुपाती होता है। किन्तु प्रवाह वेग विलायक के भौतिक गुणधर्मों पर निर्भर करता है, अतः अप्रत्यक्ष रूप से R_f मान विलायक निकायों के भौतिक गुणधर्मों पर निर्भर माना जा सकता है। इसी कारण निस्यन्दक पत्र द्वारा विलायक निकायों का प्रवाह वेग उनके भौतिक गुणधर्मों की दृष्टि से विचारणीय विषय है।

इस प्रकार के अध्ययनों में सर्वप्रथम ग्रोस्टवल्ड[1] ने बताया था कि निस्यन्दक पत्र द्वारा द्रव का प्रवाह वेग उसकी श्यानता का व्युत्क्रमानुपाती होता है। उन्होंने यह भी बताया कि निस्यन्दक पत्र द्वारा प्रवाहित जल का प्रवाह वेग समय के साथ-साथ कम होता जाता है और निम्नलिखित समीकरण का पालन करता है :

$$s=kt^m$$

जहाँ s निर्धारित समय t सेकण्ड में द्रव द्वारा तय की गई ऊँचाई तथा k ग्रौर m द्रव विशेष के लिए स्थिरांक हैं।

मुलर तथा क्लेग[2] ने इसी प्रकार का ग्रध्ययन जलीय एवं एल्कोहली विलायकों के लिए किया और बताया कि t सेकन्ड में विलायक द्वारा तय की गई ऊँचाई h समीकरण (1) का पालन करती है

$$h^2=Dt-b \qquad \ldots (1)$$

जहाँ h=ऊँचाई (मि०मी० में), t=समय (सेकन्ड), b=स्थिरांक ग्रौर D=विसरण गुणांक है जो विलायक के भौतिक गुणों पर निर्भर रहता है। यह विसरण गुणांक समीकरण (2) द्वारा श्यानता, पृष्ठ तनाव एवं घनत्व से सम्बन्धित है :

$$D=a \cdot \gamma/\eta \cdot d+b \qquad \ldots (2)$$

इस संबन्ध में प्रयुक्त a ओर b निस्यन्दक पत्र पर निर्भर स्थिरांक हैं ।

उपर्युक्त समीकरणों (1) तथा (2) की वैधता मुलर एवं क्लेग[2] ने केवल जलीय एवं एल्कोहली विलायकों के लिए सिद्ध की है ।

प्रस्तुत अध्ययन में इन समीकरणों की वैधता की पुष्टि क्लोरोफार्मी विलायक निकायों के लिए की गई है । समीकरण (1) का प्रयोग निस्यन्दक पत्र पर विलायक के प्रवाह वेग का समय के साथ रेखीय संबंध प्रदर्शित करने के लिए किया गया है जो इस प्रयोगात्मक रूप से प्राप्त h^2 के मान तथा t के ग्राफ से स्पष्ट है । तत्पश्चात् भौतिक स्थिरांकों d, η एवं γ का प्रयोगात्मक निर्धारण करके समीकरण[2] का भी परीक्षण किया गया है । यहाँ D का मान समीकरण (1) का प्रयोग करते हुए प्राप्त किया गया तथा उसके बाद समीकरण (2) की पुष्टि ग्राफ द्वारा की गई है ।

श्यानता, घनत्व एवं पृष्ठ-तनाव ऐसे भौतिक स्थिरांक हैं जो ताप पर निर्भर करते हैं, अतः इनका निर्धारण प्रत्येक अवस्था में विलायक संघटन के परिवर्तित होने पर प्रयोगात्मक रूप से करना आवश्यक होता है । ऐसी स्थिति में D का मान, जो इन भौतिक गुणों के मान से ज्ञात किया जाता है, विभिन्न तापों पर एकसा नहीं रह सकता । अतः समीकरण (2) को रूपान्तरित कर, D का मान प्राप्त करने के लिए ऐसा संबंध प्रस्तावित करने का प्रयास किया गया है जिसमें विलायकों के उन गुणधर्मों का समावेश हो, और जो यथासंभव ताप पर निर्भर न हों और योगात्मक एवं रचनात्मक गुणधर्म दर्शाते हों । इस प्रकार के गुण पैराकोर तथा रियोकोर हैं, जिन्हें γ तथा η के स्थान पर प्रयुक्त करना अधिक उपयोगी होगा । इस प्रकार नया समीकरण

$$D = a'[P]/[R] + b' \qquad \ldots (3)$$

प्रस्तुत किया जा सकता है, जिसमें $\gamma/n \cdot d$ संपूर्ण पद $[P]/[R]$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है । इस अध्ययन में प्रयोगात्मक मानों द्वारा समीकरण (3) की उपयोगिता भी सिद्ध की जा रही है ।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में विशुद्ध विलायक के रूप में क्लोरोफार्म एवं मेथेनॉल का प्रयोग किया गया है । मिश्रित विलायक निकाय इन विलायकों में क्लोरोफार्म को 1:3, 1:1 तथा 3:1 आयतनिक (v/v) अनुपातों में मिलाकर प्राप्त किए गए हैं । प्रवाह वेग अध्ययन में प्रयुक्त निस्यन्दक पत्र की पट्टियों का आकार 20×3 से०मी० था ।

प्रवाह वेग अध्ययन आरोही प्रविधि द्वारा गैस जार में किया गया । विलायकों का घनत्व पिक्नोमीटर तथा श्यानता ओस्टवाल्ड विस्कॉसिता-मापी द्वारा नापे गये । पृष्ठ तनाव के मान जेगर की विधि द्वारा ज्ञात किए गए । निस्यन्दक पत्र पर द्रव द्वारा तय की गई ऊँचाई नापने के लिए केथेटोमीटर का प्रयोग किया गया ।

सारणी 1

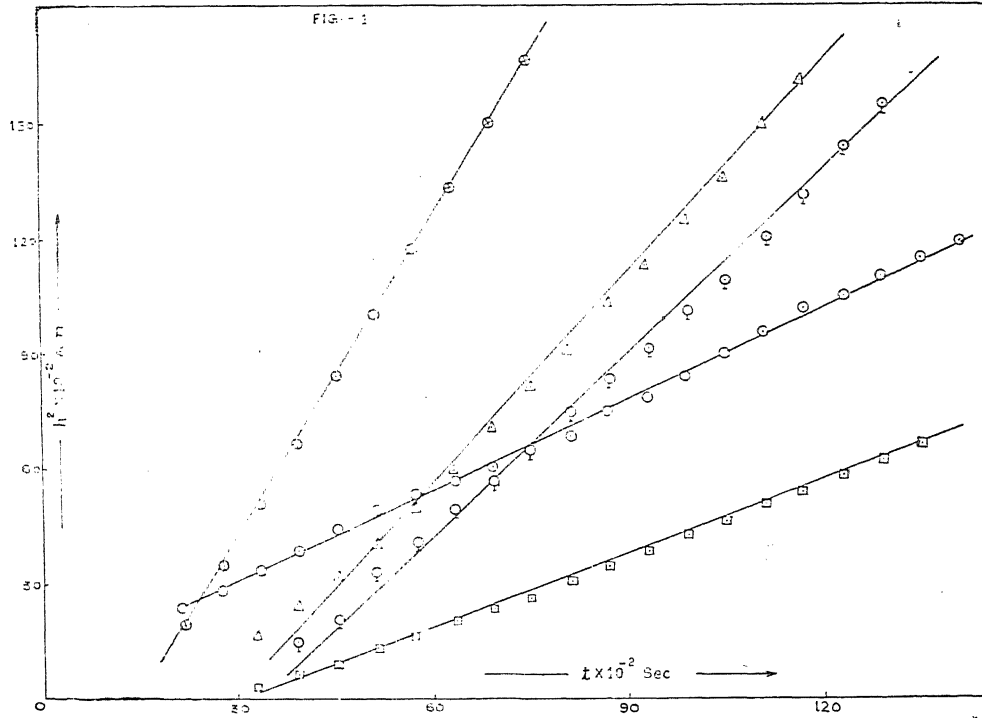
क्लोरोफार्म-मेथेनॉल निकायों के प्रवाह् वेग का अध्ययन

विलायक : अ-शुद्ध क्लोरोफॉर्म, ब-शुद्ध मेथेनॉल, स-क्लोरोफॉर्म-मेथेनॉल 3:1, द-क्लोरोफॉर्म-मेथेनॉल, 1:1, य-क्लोरोफॉर्म-मेथेनॉल, 1:3

क्रम संख्या	$t\times10^{-2}$, सेकन्ड	$h^2\times10^{-2}$, मि० मी०				
		अ	ब	स	द	य
1.	0·60	0.81	0·25	0·01	0·01	0·01
2.	1·20	1·69	0·64	0·01	0·04	0·04
3.	1·80	2·89	1·00	0·04	0·09	0·16
4.	2·40	4·00	1·69	0·04	0·16	0·25
5.	3·00	5·29	2·75	0·09	0·25	0·36
6.	6·00	10·89	6·25	0·36	0·81	1·21
7.	9·00	15·61	10·89	0·81	1·96	2·89
8.	15·00	25·00	23·04	1·96	4·41	6·76
9.	21·00	30·25	37·21	3·61	8·84	12·25
10.	27·00	36·00	53·29	5·76	12·25	18·49
11.	33·00	40·96	68·89	8·41	16·81	26·01
12.	39·00	46·24	86·49	11·56	22·90	33·64
13.	45·00	50·41	102·01	15·21	34·81	42·25
14.	51·00	54·76	118·81	18.49	42·25	51·84
15.	57·00	57·76	134·56	22·09	50·41	60·84
16.	63·00	60·84	151·29	25·00	57·76	72·25
17.	69·00	65·61	166·41	28.09	65·61	82·81
18.	75·00	68·89	184·96	32·49	75 69	92·16
19.	81·00	75·69	201·64	36.00	84·65	104·04
20.	87·00	79·21	...	39·69	92·16	114·49
21.	93·00	84·64	...	43·56	102·01	125·44
22.	99·00	90·25	...	47·61	110·25	136·39
23.	105 00	96·04	...	51·84	121·00	151·29
24.	111·00	102·01	...	54·26	132·25	161·29
25.	117.00	105·09	...	59·29	144·00	174·74
26.	123·00	110·25	...	63·01	155·76	184·96
27.	129·00	115·09	...	67·24	163·84	196·81
28.	135·00	118·81	...	71·00	174·24	...

निस्यन्दक पत्र द्वारा प्रवाह वेग अध्ययन की विधि

प्रयोग में लाई जाने वाली निस्यन्दक पत्र की पट्टी के एक सिरे पर पेंसिल द्वारा एक रेखा अंकित कर उसे विलायक के वाष्प से संतृप्त गैस जार में इस प्रकार लटकाया गया जिससे पट्टी का अंकित सिरा पेट्री डिश में रखे विलायक में डूबा रहे। फिर अंकित रेखा से समुचित समयांतराल पर विलायक की ऊँचाई ऊर्ध्वमापी की सहायता से नाप ली गई। इस प्रकार शुद्ध एवं मिश्रित विलायकों के प्रवाह वेग का अध्ययन किया गया जिनसे प्राप्त आंकड़े सारणी 1 में दिये गये हैं।

इस प्रकार किसी भी विलायक के लिये प्राप्त h^2 (मिलीमीटर) एवं t (सेकन्ड) के मध्य ग्राफ खींचने से सरल रेखाएं प्राप्त हुईं (चित्र 1) जिनके ढलान मानों से विसरण गुणांकों (D) के मान

चित्र 1

प्राप्त किये गये। प्राप्त सरल रेखीय ग्राफ इस बात की पुष्टि करते हैं कि समीकरण (1) इन विलायकों के लिए भी एक सरल रेखा समीकरण है। अब सामान्य विधियों द्वारा विलायक निकायों के भौतिक स्थिरांक ज्ञात किए गए। प्रस्तुत अध्ययन के अन्तर्गत प्रयुक्त सभी विलायक निकायों के प्राप्त विसरण गुणांकों एवं $\gamma/\eta \cdot d$ पद के प्रयोगात्मक मानों (सारणी 2) के मध्य ग्राफ खींचने पर पुनः एक सरल

सारणी 2

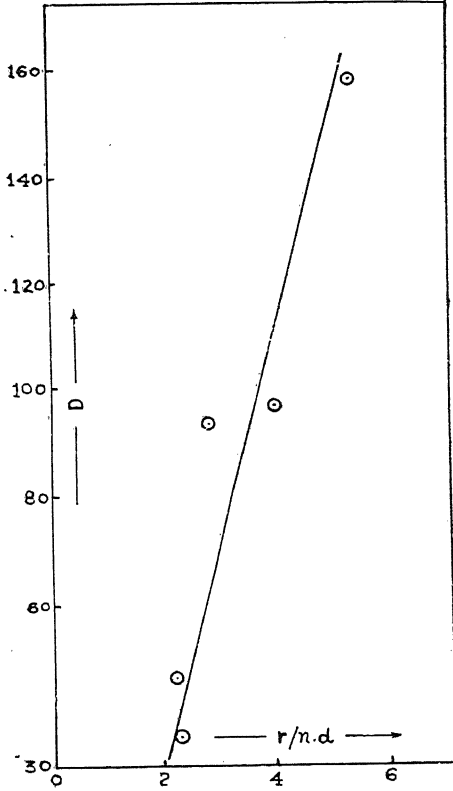
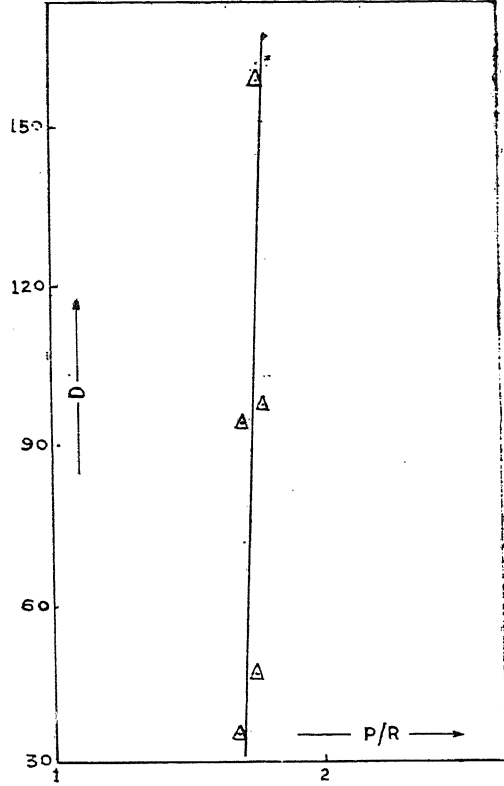
विलायक निकायों के भौतिक स्थिरांक तथा विसरण गुणांक (ताप 35° से०)

क्रम सं 1	संघटन 2	अनुपात 3	पृष्ठ-तनाव 4	b 5	घनत्व 6	श्यानता 7	D 8	$\gamma/\eta \cdot d$ 9
1.	शुद्ध क्लोरोफार्म	100%	28·278	9·0	1·4548	8·896	47·0	2·185
2.	शुद्ध मेथेनॉल	100%	22·838	—36	0·7776	5·468	159·6	5·373
3.	क्लोरोफार्म:मेथेनॉल	3:1 v/v	22·938	—16·5	1·2914	8·142	36·00	2·183
4.	क्लोरोफार्म:मेथेनॉल	1:1 v/v	22·620	—49	1·1123	7·369	94·5	2·765
5.	क्लोरोफार्म:मेथेनॉल	1:3 v/v	25·530	—51	0·9533	6·566	98·0	4·079

सारणी 3

विलायक निकायों के रचनात्मक गुणधर्म

क्रम सं०	संघटन	अनुपात (v/v)	पैराकोर (P)	रियोकोर (R)	(P)/(R)
1.	शुद्ध क्लोरोफार्म	100%	169·30	107·90	1·754
2.	शुद्ध मेथेनॉल	100%	89·95	50·89	1·768
3.	क्लो० : मेथे०	3 : 1	142·20	86·26	1·684
4.	क्लो० : मेथे०	1 : 1	119·90	70·57	1·699
5.	क्लो० : मेथे०	1 : 3	107·00	60·23	1·776

रेखीयग्राफ प्राप्त हुआ (चित्र 2)। किन्तु इस सरल रेखा के बिन्दु अधिकतर प्रकीर्ण हैं। इस प्रकार संबंध (2) की वैधता की पुष्टि इन विलायक निकायों के लिए आंशिक रूप से होती है।

चित्र 2 चित्र 3

इसी प्रकार विसरण गुणांकों के मानों एवं $[P]/[R]$ पद के मानों के मध्य ग्राफ खींचने से भी सरल रेखा प्राप्त हुई (चित्र 3)। किन्तु इन रेखाओं के बिंदु, रेखा के अधिक निकट हैं अतः यह सरल रेखा ग्राफ (चित्र 3) उपर्युक्त सरल रेखा ग्राफ (चित्र 2) की तुलना में अधिक अच्छा है।

इस प्रकार प्रस्तावित संबंध (3), जिसमें γ/η , d पद $[P]/[R]$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है, वैध तो है ही, साथ ही संबंध (2) से अधिक उपयोगी भी दृष्टिगोचर होता है।

विवेचना

निस्यन्दक पत्र पर आयन या अणुओं की गति विलायक की प्रकृति पर निर्भर करती है, अतः कागज वर्णलेखिकी की दृष्टि से विलायक के भौतिक गुणधर्मों का अध्ययन बहुत महत्वपूर्ण है।

निस्यन्दक पत्र द्वारा द्रव का अवरोहण केशिका क्रिया के कारण होता है, अतः श्यानता, पृष्ठ-तनाव आदि गुणधर्म विलायक के प्रवाह वेग को भी प्रभावित करते हैं। इसी कारण शोधकर्ताओं ने द्रव के भौतिक गुणों एवं उनके प्रवाह वेग के मध्य विभिन्न संबंध प्रतिपादित किए हैं[1,2]।

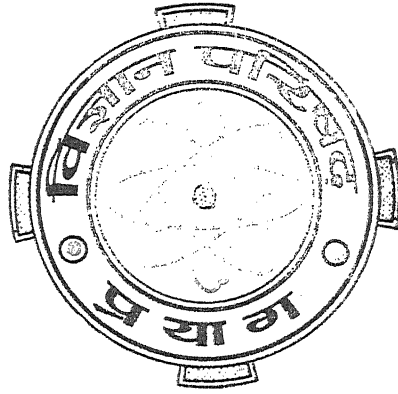
मुलर एवं क्लेग[2] ने जलीय तथा एल्कोहली निकायों पर अपने विस्तृत अध्ययन के आधार पर पूर्वकथित संबंध ($h^2=Dt-b$) दिया, जिसमें D एक विशेष निस्यन्दक पत्र और विलायक के लिए स्थिरांक है जो विलायक के भौतिक स्थिरांकों (d, η a γ आदि) पर निर्भर सिद्ध किया गया है और संबंध $D=a.\gamma/\eta \cdot d+b$ का पालन करता है। एल्कोहली तथा जलीय निकायों के लिए उपर्युक्त अध्ययन से प्रभावित होकर प्रस्तुत शोध पत्र में क्लोरोफार्मी विलायकों के लिए भी इस प्रकार के संबंधों के परीक्षण पर विचार किया गया है।

हाल ही में भटनागर एवं सहयोगियों[3,4,5] ने कागज वर्णलेखिकी द्वारा अकार्बनिक पदार्थों के विश्लेषण में क्लोरोफार्म तथा क्लोरोफार्म मिश्रित विलायकों के प्रयोग का विस्तृत अध्ययन करके इन नए विलायक निकायों की उपयोगिता प्रदर्शित की है। अतः इन विलायकों के भौतिक गुण तथा प्रवाह वेग आदि विशेषताओं का अध्ययन विचारणीय एवं महत्वपूर्ण समझा गया और प्रस्तुत शोधपत्र में क्लोरोफार्म-मेथेनॉल मिश्रित विलायकों के प्रवाह वेग का इस दृष्टि से अध्ययन मुलर एवं क्लेग द्वारा प्रस्तावित संबंध की सार्वत्रिक वैधता की पुष्टि करता है। प्रेक्षणों से स्पष्ट है कि h^2 तथा t के मध्य रेखीय संबंध है क्योंकि प्राप्त ग्राफ (चित्र 1) सरल रेखाएं हैं। अध्यायित विलायकों के लिए विसरण गुणांक के मान ग्राफों की इन सरल रेखाओं के ढलान मानों से प्राप्त कर प्रथम बार यहाँ प्रस्तुत किये गये हैं। एक ही निस्यन्दक पत्र तथा विलायक विलेय के लिए D और b के मान स्थिरांक हैं। लगभग पाँच बार किये गये विभिन्न प्रेक्षणों से प्राप्त मानों में 10 प्रतिशत से अधिक भिन्नता दृष्टिगोचर नहीं हुई।

संबंध (2) भी एक सरल रेखा समीकरण है तथा इसमें विसरण गुणांक $\gamma/\eta \cdot d$ पद के मान का समानुपाती है। जब क्लोरोफार्मी विलायकों के लिए इस संबंध की पुष्टि करने हेतु परिकलित विसरण गुणांकों एवं $\gamma/\eta \cdot d$ के प्रयोगात्मक मानों के मध्य ग्राफ खींचा गया (चित्र 2) तो जो ग्राफ बना उससे यह स्पष्ट हो गया कि प्रत्याशित रेखा से ग्राफ के बिन्दु पर्याप्त रूप में प्रकीर्ण रहते हैं। अतः यह संबंध इन विलायक निकायों के लिये पूर्णरूपेण उचित नहीं लगता। निस्सन्देह विलायकों का व्यवहार उनके भौतिक गुणों पर निर्भर होता है, फिर यह विचलन क्योंकि इस विचलन का एक कारण भौतिक गुणों के प्रयोगात्मक मानों में त्रुटि हो सकती है, किन्तु इन भौतिक गुणों का प्रयोगात्मक मान ज्ञात करने में उन्हीं विधियों का प्रयोग किया गया है जो प्रायः शोधकर्ताओं द्वारा प्रयुक्त की जाती हैं। अतः इन मानों की प्रयोगात्मक त्रुटि साधारण रूप से सीमा के अन्दर होनी चाहिए। विचलन का दूसरा कारण भौतिक स्थिरांकों की ताप-निर्भरता हो सकती है। इन स्थिरांकों के मानों का निर्धारण लगभग स्थिर ताप पर पूर्ण सावधानी के साथ किया गया है किन्तु पूर्ण विश्वास के साथ नहीं कहा जा सकता कि प्रवाह वेग अध्ययन के समय गैस जार का ताप पूर्णरूपेण स्थिर रहा। अतः प्रवाह वेग अध्ययन के समय ताप में सूक्ष्म परिवर्तन से भी यह विचलन संभव है। इस प्रकार क्लोरोफार्मी विलायकों के लिए समीकरण (2) की उपयोगिता दर्शाने के लिए सम्पूर्ण प्रयोग एक ही ताप पर किया जाना आवश्यक है

जो व्यावहारिक रूप से कुछ कठिन है। अतः इस कठिनाई को दूर करने के लिए एक नवीन समीकरण (3) का प्रतिपादन किया गया है। इसमें ऐसे भौतिक स्थिरांकों का समावेश है जो योगात्मक और रचनात्मक है (जैसे पेराकोर और रियोकोर)। शुद्ध विलायकों के लिए इन स्थिरांकों का निर्धारण प्रमाणित तालिकाओं से किया जा सकता है। इसी प्रकार मिश्रित विलायक निकायों के लिए भी उनके संघटन के अनुसार यह निर्धारण मिश्रण नियम से किया जा सकता है। अतः इसी कारण (3) में से घटक $\gamma/\eta \cdot d$ को $[P]/[R]$ द्वारा प्रतिस्थापित करने से उपर्युक्त दोनों प्रकार की (ताप निर्भरता तथा प्रयोगात्मक) त्रुटियों की संभावना समाप्त हो जाती है क्योंकि इस समीकरण के सभी स्थिरांक बिना प्रयोग के ही प्राप्त किये जा सकते हैं। प्रस्तुत अध्ययन में क्लोरोफार्मी विलायकों के लिये प्राप्त D और $[P]/[R]$ के मानों के मध्य ग्राफ खींचने पर सरल रेखा (चित्र 3) प्राप्त होती है जो चित्र (2) की रेखा की तुलना में अधिक अच्छी है। अतः प्रतिपादित समीकरण (3) समीकरण (2) की तुलना में अधिक उपयोगी सिद्ध हुआ है।

निर्देश

1. ओस्टवाल्ड, डब्लू० ओ०, **कोलाइड जर्न०** (सप), 1908, **2**, 20.
2. मुलर, आर० एच० और क्लेग, डी० एल०, **एनल० केमि०**, 1951, **23**, 396.
3. भटनागर, आर० पी० और शर्मा, के० डी०, **एनल० केमि० एक्टा०**, 1964, **30**, 310.
4. भटनागर, आर० पी० और शर्मा, के० डी०, **इन्डियन जर्न० एप्ला० केमि०**, 1966, **29**, 133.
5. भटनागर, आर० पी० और पूनिया, एन० एस०, **एनल० केमि०**, 1962, **34**, 1325.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 17	अक्टूबर 1974	संख्या 4

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No 4, October, 1974, Pages 235-243

दो चरों वाले H-फलन सम्बन्धी कुछ फल

एच० सी० गुलाटी
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, मंदसौर

[प्राप्त—अक्टूबर 9, 1973]

सारांश

दो चरों वाले H-फलन तथा लागेर बहुपदियों वाले कतिपय समाकलों का मूल्यांकन किया गया है। इन समाकलों का उपयोग दो चरों वाले H-फलन के कतिपय प्रसार सूत्रों की स्थापना के लिये प्रयुक्त किया गया है। विशिष्ट दशाओं के रूप में फाक्स के H-फलन, दो चरों वाले G-फलन तथा कैम्पे द फेरी फलन के लिये कुछ फल प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some results involving H-function of two variables. *By.* H. C. Gulati, Department of Mathematics, Government College, Mandsaur.

In this paper we have evaluated some integrals involving H-function of two variables and Laguerre polynomials. We have used these integrals to establish some expansion formulae for H-function of two variables. Some results for Fox's H-function, G-function of two variables and Kampé de Fériet function have been obtained as particular cases.

मुनोट तथा कल्ला[6] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन को निम्नांकित परिवर्द्धित रूप में लिखा जा सकता है।

$$H_{(p_1,\, p_2),\, p_3;\, (q_1,\, q_2),\, q_3}^{(m_1,\, m_2);\, (n_1,\, n_2),\, n_3}\begin{bmatrix} y \\ \\ z \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\ [(c_{p_2}, C_{p_2})];\ [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\ ](d_{q_2}, D_{q_2})];\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{n_1}(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_j\,t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_j+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_3}\Gamma(1-d_j+D_jt)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\,y^s\,z^t}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+s+F_jt)}ds\,dt \quad (1\cdot1)$$

L_1 तथा L_2 बार्नीज प्रकार के उपयुक्त कंटूर हैं। L_1 s-तल में इस प्रकार है कि $\Gamma(b_j-B_js)$, $j=1, \ldots, m_1$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+A_js)$, $j=1, \ldots, n_1$ तथा $\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)$, $j=1, \ldots, n_3$ के पोल बाईं ओर रहें। इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल पर इस प्रकार स्थित है जिससे कि $\Gamma(d_j-D_jt)$, $j=1, \ldots, m_2$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-c_j+C_jt)$, $j=1, \ldots, n_2$ तथा $\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)$, के पोल बाईं ओर रहें।

$$0\leqslant m_1\leqslant q_1,\ 0\leqslant m_2\leqslant q_2,\ 0\leqslant n_1\leqslant p_1,\ 0\leqslant n_2\leqslant p_2,\ 0\leqslant n_3\leqslant p_3$$

द्विगुण समाकल अभिसारी होता है यदि

$$\sum_{j=1}^{p_1}A_j+\sum_{j=1}^{p_3}E_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j<0,\quad \sum_{j=1}^{p_2}C_j+\sum_{j=1}^{p_3}E_j-\sum_{j=1}^{q_2}D_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j<0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_1}A_j-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}A_j+\sum_{j=1}^{n_3}E_j-\sum_{j=n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_{j=1}^{m_1}B_j-\sum_{j=m_1+1}^{q_1}B_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j\equiv\alpha>0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_2}C_j-\sum_{j=n_2+1}^{p_2}C_j+\sum_{j=1}^{n_3}E_j-\sum_{j=n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_{j=1}^{m_2}D_j-\sum_{j=m_2+1}^{q_2}D_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j\equiv\beta>0,$$

तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\alpha\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\beta\pi$.

यहाँ पर और आगे भी $[(a_p, A_p)]$ से प्राचलों के सेट $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)$ का द्योतन हुआ है। संकेत (a_p) $a_1, \ldots, a_p$ के लिये प्रयुक्त है। इस शोध पत्र में बड़े अक्षरों से धन पूर्णांकों का द्योतन हुआ है।

(1·1) के दाहिने पक्ष को अब हम इसके बाद $H\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}$ द्वारा अंकित करेंगे और यही दो चरों वाला अभीप्सित H-फलन है। अब हम दो चरों वाले H-फलन की कुछ विशिष्ट दशाओं की विवेचना करेंगे।

फाक्स के H-फलन[4] की परिभाषा का उपयोग करते हुये दो चरों वाले H-फलन को एकाकी कंटूर समाकल के द्वारा निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$H\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+A_j s)\, y^s}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+B_j s) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - A_j s)}$$

$$H^{m_2,\, n_2+n_3}_{p_2+p_3,\, q_2+q_3}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} [(c_{n_2}, C_{n_2})], (e_1-E_1 s, E_1), (e_1-E_2 s, E_2), \ldots, (e_{p_3}-E_{p_3} s, E_{p_3}), \\ (c_{n_2+1}, C_{n_2+1}), \ldots, (c_{p_2}, C_{p_2}). \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})], (f_1-F_1 s, F_1), (f_2-F_2 s, F_2), \ldots, (f_{q_3}-F_{q_3} s, F_{q_3}) \end{matrix} \right] ds \quad (1{\cdot}2)$$

समस्त बड़े अक्षरों को इकाई के तुल्य रखने पर,

$$H\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = G^{(m_1,\, m_2);\, (n_1,\, n_2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2),\, p_3;\, (q_1,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} (a_{p_1});\, (c_{p_2}) \\ (e_{p_3}) \\ (b_{q_1});\, (d_{q_2}) \\ (f_{q_3}) \end{matrix}\right] \quad (1{\cdot}3)$$

(1·3) का दाहिना पक्ष दो चरों वाला G-फलन है जिसे अग्रवाल[1] तथा शर्मा[7] ने परिभाषित किया है (देखें[5] भी)।

$n_3 = p_3 = q_3 = 0$, रखने पर हमें

$$H^{(m_1,\, m_2),\, (n_1,\, n_2),\, 0}_{(p_1,\, p_2),\, 0;\, (q_1,\, q_2),\, 0}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\, [(c_{p_2}, C_{p_2})];\, - \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\, [(d_{q_2}, D_{q_2})];\, - \end{matrix}\right]$$

$$H^{m_1,\, m_2}_{p_1,\, p_2}\left[y \,\middle|\, \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})] \end{matrix} \right] \times H^{m_2,\, n_2}_{p_2,\, p_2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} [(c_{p_2}, C_{p_2})] \\ [(d_{q_2}, D_{q_2})] \end{matrix} \right] \quad (1{\cdot}4)$$

प्राप्त होगा जहाँ दाईं ओर के H-फलन फाक्स के H-फलन हैं।

निम्नांकित प्रकार से (1·1) के प्राचलों को सुव्यवस्थित करने पर हमें दो चरों वाले H-फलन तथा कैम्प द-फेरी फलन के मध्य निम्नांकित सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$H^{(1,\,1);\,(m,\,m),\,1}_{(m,\,m),\,1;\,(p+1,\,p+1),\,n}\left[\begin{matrix}-y\\ \\ -z\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-b_1,1),\ldots,(1-b_m,1);(1-c_1,1),\ldots,(1-c_m,1):\\ (1-a_1,1),\ldots,(1-a_1,1)\\ (0,1),\ (1-e_1,1),\ldots(1-e_p,1);(0,1),\ (1-f_1,1),\\ \ldots,(1-f_p,1);(1-d_1,1),\ldots,(1-d_n,1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{1}\Gamma a_j\prod_{j=1}^{m}\Gamma b_j\prod_{j=1}^{m}\Gamma c_j}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma d_j\prod_{j=1}^{p}\Gamma e_j\prod_{j=1}^{p}\Gamma f_j}\,F\left[\begin{matrix}1\\ m\\ n\\ p\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_1\\ b_1,c_1,\ldots,b_m,c_m\\ d_1,\ldots,d_n\\ e_1,f_1,\ldots,e_p,f_p\end{matrix}\right|\,y,z\right] \quad (1\cdot5)$$

$m_2=q_2=D_1=1$, $d_1=p_2=p_3=n_2=n_3=q_3=0$ रखने पर तथा सम्बन्ध

$H^{1,\,0}_{0,\,1}\left(z\left|\begin{matrix}-\\(0,1)\end{matrix}\right.\right)=G^{1,\,0}_{0,\,1}\left(z\left|\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\right.\right)=e^{-z}$ का उपयोग करने पर हमें

$$H^{(m_1,\,1);\,(n_1,\,0}_{(p,\,0),\,0;\,(q_1,\,1),\,0}\left[\begin{matrix}y\\ \\ z\end{matrix}\left|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];(-);(-)\\ \\ [(b_{q_1},B_{q_1});(0,1);(-)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=e^{-z}\,H^{m_1,\,n_1}_{p_1,\,q_1}\left(y\left|\begin{matrix}[(a_{p_1}\,A_{p_1})]\\ [(b_{q_1},B_{q_1})]\end{matrix}\right.\right) \quad (1\cdot6)$$

प्राप्त होगा।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित समाकल स्थापित किये जावेंगे:

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}\,e^{-x}\,L_n^{\alpha}(x)\,H\left[\begin{matrix}yx^{\delta}\\ zx^{\delta}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\,H^{(m_1,\,m_2);\,(n_1,\,n_2),\,n_3+2}_{(p_1,\,p_2),\,p_3+2;\,(q_1,\,q_2),\,q_3+1}\left[\begin{matrix}y\\ \\ \\ z\end{matrix}\left|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];[(c_{p_2},C_{p_2})];(1-\beta,\delta),\\ (1-\beta+\alpha,\delta),(e_{p_3},E_{p_3})\\ [(b_{q_1},B_{q_1})];[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})],\\ (1-\beta+\alpha+n,\delta)\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot1)$$

जहाँ $Re\left[\beta+\delta\left(\frac{b_j}{B_j}\right)+\delta\frac{d_i}{D_i}\right]>0, j=1,\ldots,m_1;\ i=1,\ldots,m_2$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिबन्ध (1·1) के ही सदृश हैं।

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\, H\left[\begin{matrix} yx^{\delta} \\ z \end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!} H^{(m_1, m_2);\,(n_1+2,\, n_2),\, n_3}_{(p_1+2,\, p_2),\, p_3;\,(q_1+1,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} (1-\beta, \delta), (1-\beta+\alpha, \delta), [(a_{p_1}, A_{p_1})]; \\ [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})], (1-\beta+\alpha+n, \delta); [(d_{q_2}, D_{q_2})]; \\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right.\right] \tag{2·2}$$

जहाँ $Re\left[\beta+\delta\left(\frac{b_j}{B_j}\right)\right]>0, j=1, \ldots, m_1$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिबन्ध (1·1) के ही समान हैं।

$$\int_3^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\, H\left[\begin{matrix} y \\ zx^{\delta} \end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!} H^{(m_1, m_2);\,(n_1,\, n_2+2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2+2),\, p_3;\,(q_1,\, q_2+1),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; (1-\beta, \delta), (1-\beta+\alpha, \delta), \\ [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, E_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})], (1-\beta+\alpha+n, \delta); \\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right.\right] \tag{2·3}$$

जहाँ $Re\left[\beta+\delta\left(\frac{d_i}{D_i}\right)\right]>0, i=1, \ldots, m_2$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिबन्ध (1·1) के ही समान हैं।

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिये (1·1) के बाईं ओर के H-फलन को व्यक्त करते हैं और समाकलन के क्रम को पलट देते हैं जो द ला पूसिन के प्रमेय [2, p. 504] के कारण वैध है क्योंकि प्रक्रम में सन्निहित समस्त समाकल अभिसारी हैं। इससे हमें निम्नांकित प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_j s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_j s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_j t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_j s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_j s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_j t)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\, y^s\, s^t}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-C_jt) \prod_{j=n_3+1}^{p} \Gamma(e_j-E_js-E_jt) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)}$$

$$\times \int_0^\infty x^{\beta+\delta t+\delta s-1}\, e^{-x}\, L_n^{\alpha}(x)\, dx\, ds\, dt.$$

अब [3, p. 292 (1)] अर्थात्

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}\, e^{-x}\, L_n^{\alpha}(x)\, dx = \frac{(-1)^n \Gamma\beta\, \Gamma(\beta-\alpha)}{n!\, \Gamma(\beta-\alpha-n)},\ Re\, \beta>0.$$

तथा (1·1) का प्रयोग करने से समाकल (2·1) स्थापित हो जाता है।

इसी प्रकार समाकल (2·2) तथा (2·3) भी सिद्ध किये जाते हैं।

प्रसार: जिन प्रसारों को स्थापित किया गया है, वे हैं:

$$x^w H\left[\begin{matrix} yx^\delta \\ zx^\delta \end{matrix}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(\alpha+r+1)}$$

$$H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3+2}_{(p_1, p_2), p_3+2; (q_1, q_2), q_3+1}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \end{matrix}\left|\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; (-\alpha-w, \delta), \\ (-w, \delta), [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})], \\ (-w+r, \delta) \end{matrix}\right.\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·1}$$

जहाँ $Re\left[w+\alpha+\delta\frac{b_j}{B_j}+\delta\frac{d_i}{D_i}\right]>-1,\ (j=1, \ldots, m_1,\ i=1, \ldots, m_2)$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिबन्ध (1·1) के ही समान हैं।

$$x^w H\left[\begin{matrix} yx^\delta \\ zx^\delta \end{matrix}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(\alpha+r+1)}$$

$$H^{(m_1, m_2); (n_1+2, n_2), n_3}_{(p_1+2, p_3); (q_1+1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} (-\alpha-w, \delta), (-w, \delta), [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; \\ [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})], (-w+r, \delta); [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix}\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·2}$$

जहाँ $Re\left[w+\alpha+\delta\frac{b}{B_j}\right]>-1, j=1, \ldots, m_1$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिवन्ध (1·1) के ही समान हैं।

$$x^w H\left[\begin{matrix} y \\ zx^\delta \end{matrix}\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(a+r+1)}$$

$$H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2+2),\ n_3}_{(p_1,\ p_2+2),\ p_3;\ (q_1,\ q_2+1),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \end{matrix}\left|\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\ (-a-w, \delta), (-w, \delta), \\ [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})], (-w+r, \delta) \\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right.\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·3}$$

जहाँ $Re\left[w+a+\delta\frac{dj}{D_j}\right]>-1, j=1, \ldots, m_2$

वैधता सम्बन्धी अन्य प्रतिबन्ध (1·1) के ही समान हैं।

उपपत्ति : (3·1) को सिद्ध करने के लिये, माना कि

$$f(x)=x^w\ H\left[\begin{matrix} yx^\delta \\ zx^\delta \end{matrix}\right]=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\, L_r^{\alpha}\ (x) \tag{3·4}$$

समीकण (3·4) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0, \infty)$ में परिवद्ध विचरणों वाला है जब $w \geqslant 0$

(3·4) के दोनों ओर $x^{a}\, e^{-x}\, L_n^{\alpha}(x)$ से गुणा करने पर तथा 0 से ∞ तक x के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty x^{w+a}\ e^{-x}\ L_n^{\alpha}\ (x)\ H\left[\begin{matrix} yx^\delta \\ zx^\delta \end{matrix}\right] dx=\sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_0^\infty x^{a}\ e^{-x}\ L_n^{\alpha}\ (x)\ L_r^{\alpha}\ (x)\ dx$$

अब (2·1) तथा लागेर बहुपदियों के लाम्बिक गुण [3, p. 292-293, (2) तथा (3)] के प्रयुक्त करने पर अर्थात्

$$\int_0^\infty x^{a}\ e^{-x}\ L_r^{\alpha}\ (x) L_r^{\alpha}\ (x)\ dx=0, \qquad \text{जब } n\neq r$$

$$=\frac{\Gamma(a+r+1)}{n!}, \quad \text{जब } u=r$$

हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी।

$$C_r=\frac{(-1)^r}{\Gamma(a+r+1)}\ H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3+2}_{(p_1,\ p_2),\ p_3+2;\ (q_1,\ q_2),\ q_3+1}\left[\begin{matrix} y \\ \\ z \\ \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; \\ (-a-w, \delta), (-w, \delta), [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; \\ [(f_{q_3}, F_{q_3})], (-w+r, \delta) \end{matrix}\right.\right]$$

(3·4) तथा (3·5) से प्रसार (3·1) सिद्ध हो जाता है ।

विशिष्ट दशायें

समस्त बड़े अक्षरों को इकाई के तुल्य रखने पर तथा यदि $\delta=1$, तो (3·1) से हमें

$$x^w G\left[\begin{matrix} yx^\delta \\ zx^\delta \end{matrix}\right]=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(a+r+1)} \times$$

$$G_{(p_1, p_2), p_3+2; (q_1, q_2), q_3+1}^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3+2} \left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}); (c_{p_2}); (-a-w, -w, (e_{p_3}) \\ (b_{q_1}); (d_{q_2}); (f_{q_3}), -w+r \end{matrix} \right.\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·6}$$

की प्राप्ति होगी जहाँ $Re\ [w+a+\delta b_j+\delta d_i]>-1, j=1, \ldots, m_2$

$(p_1+q_1+p_2+q_3)<2(m_1+n_1+n_3), (p_2+q_2+p_3+q_3)<2(m_2+n_2+n_3)$

$|\arg y|<[m_1+n_1+n_1-\frac{1}{2}(p_3+q_1+p_1+q_3)]\pi$

$|\arg z|<[m_2+n_3+n_3-\frac{1}{2}(p_1+q_2+p_3+q_3)]\pi$

इसी प्रकार प्राचलों के विशिष्टीकरण से (3·2) तथा (3·3) से भी दो चरों वाले G-फलन के लिये सूत्र प्राप्त किये जाते हैं ।

$m_2=q_2=D_1=1, d_1=p_2=p_3=n_2=n_3=n_3=q_3=0$ मानने पर तथा (1·6) के प्रयोग से हमें (3·2) से

$$x^w H_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}\left[yx^\delta \left| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})) \end{matrix} \right.\right]$$

$$=\frac{(-1)^r}{\Gamma(a+r+1)} H_{p_1+2, q_1+1}^{m_1, n_1+2}\left[y \left| \begin{matrix} (-a-w, \delta), (-w, \delta), [(a_{p_1}, A_{p_1} \\ [(a_{q_1}, A_{q_1})], (-w+r, \delta) \end{matrix} \right.\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·7}$$

प्राप्त होता है जहाँ $Re\left[w+a+\delta \frac{b_j}{B_j}\right]>-1, j=1, \ldots, m_1$

$$\sum_{j=1}^{p_1} A_j-\sum_{j=1}^{q_1} B_j<0, \sum_{j=1}^{n_1} A_j-\sum_{j=n_1+1}^{p_1} A_j+\sum_{j=1}^{m_1} B_j-\sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j \equiv \lambda>0$$

तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\lambda\pi$.

(1·5) की सहायता से दो चरों वाले H-फलन को कैम्पे द-फेरी फलन में समानीत करने पर (3·1) से हमें

$$x^w F\left[\begin{array}{c|l} 1 & a_1, \ldots, a_1 \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n & d_1, \ldots, d_n \\ p & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array}\middle| yx^\delta, zx^\delta\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(1+w+a)\Gamma(1+w)}{\Gamma(a+r+1)(\Gamma(1+u-r)}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|l} 1+2 & 1+w+a, 1+w, a_1, \ldots, a_1 \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n+1 & d_1, \ldots, d_n, 1+w-r \\ n & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array}\middle| y, z\right] L_r^{\alpha}(x) \tag{3·3}$$

प्राप्त होगा जहाँ $(w+a)>-1$, $p+n<1+m+1$,

$|\arg y|<\frac{1}{2}(1+m+1-p-n)\pi$ तथा $|\arg z|$ $|\arg z|<\frac{1}{2}(1+m+1-p-n)\pi$

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस (इंडिया)** 1965, **31(A)**, 536-546
2. ब्रामविच, टी० जे० आई०, Theory of Infinite Series. **मैकमिलन एंड कम्पनी** 1955
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. **भाग II मैकग्राहिल** (1954)
4. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961 **98**, 395-429
5. गुलाटी, एच० सी०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1971, **14**, 72-88
6. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, **(प्रकाशनाधीन)**
7. शर्मा, बी० एल०, Ann. Soc. Sci., Bruxelles Ser, 1965 T, **79-1**, 26-40

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 17, No 4, October, 1974, Pages 245-250

जोशी प्रभाव पर पूर्व-कालप्रभावन तापन, पूर्व-तापन कालप्रभावन तथा पूर्व-विरामावधि तापन की क्रिया

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—सितम्बर 3, 1973]

सारांश

$\pm \triangle i$ पर पूर्व-कालप्रभावन तापन, पूर्व-तापन कालप्रभावन तथा पूर्व-विरामावधि तापन के प्रभाव का अध्ययन किया गया। काल प्रभावन का $+\triangle i$ को घटाना और $-\triangle i$ को बढ़ाना रासायनिक शोषित परत की क्रमश: निर्मिति को सूचित करता है। निकाय को विरामावधि में रखकर छोड़ने से $+\triangle i$ के बढ़ने और $-\triangle i$ के घटने की व्याख्या, वान्डर वाल की परत में विद्यमान अधिशोषित गैसीय जाति के कणों तथा रासायनिक शोषित परत की पृष्ठ उत्प्रेरित अन्योन्य क्रिया के आधार पर की गई है। निकाय की अविक्षुब्ध अवस्था में उसका ताप बढ़ाने पर, अर्थात् ओज़ोनित्र को 80° से० पर एक घंटे तक गर्म करने से $+\triangle i$ में वृद्धि तथा $-\triangle i$ में ह्रास हुआ। क्योंकि उच्च ताप पर वान्डर वाल की परत लगभग विलुप्त होती है, अतः यह ताप वृद्धि के कारण, रासायनिक शोषित परत में विद्यमान अधिशोषित कणों की अन्योन्य क्रिया की वर्धित दर को सूचित करता है। पृष्ठ का ताप बढ़ाने पर, अन्योन्य क्रिया की दर बढ़ने के कारण, विराम की अपेक्षा तापन की क्रिया अधिक प्रभावी होती है; यह इस विचार को जन्म देती है कि तापन समान अवधि के विराम की अपेक्षा वृहत्तर कालप्रभावन-विरोधी क्रिया करने में समर्थ हो सकता है। तापन या कालप्रभावन के द्वारा $\pm \triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तनों को कालप्रभावन या तापन पूर्णतः पूर्व-अवस्था में लाने में असमर्थ है; यह आंशिक पुनः प्राप्ति तापन की अपेक्षा कालप्रभावन के शीघ्रप्रभावी क्रिया होने के कारण है।

Abstract

Influence of pre-aging heating, pre-heating aging and the pre-rest period heating on Joshi effect. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The influence of pre-aging heating, pre-heating aging and pre-rest period heating on $\pm\triangle i$ has been studied. Aging decreases $+\triangle i$ and increases $-\triangle i$ and this has been attributed to the progressive formation of a chemisorbed layer. When the system is stood over in a rest period, $+\triangle i$ increases and $-\triangle i$ decreases and this has been explained due to a surface catalysed interation between absorbed gaseous species in a Vander Walls layer and chemisorbed layer. As the temperature is increased, when the system is unexcited, viz., when the ozonizer is heated to 80°C for 1 hour, $+\triangle i$ increases and $-\triangle i$ decreases. This has been attributed to an increased rate of interaction due to temperature rise between absorbed gas particles in a chemisorbed layer, since at the high temperature, Vander Waals layer is practically extinct. That heating is a quicker process than resting is due to increased rate of interaction as the temperature of surface is increased ; this therefore suggested that heating can bring about a larger anti-aging effect compared to that by resting for the same period. Aging or heating does not restore completely changes in $\pm\triangle i$ brought about by heating or aging; this part recovery is due to aging being a quicker process than heating.

कालप्रभावन, विरामावधि तथा तापन पर $\pm\triangle i$ की निर्भरता विषयक पूर्ववर्ती अन्वेषणों[1] से पता लगता है कि जोशी प्रभाव, $\pm\triangle i$ इन अभिक्रियाओं के लिए बहुत संवेदनशील है। कालप्रभावन $-\triangle i$ को बढ़ाता तथा $+\triangle i$ को घटाता है, जबकि विरामावधि तथा तापन $-\triangle i$ को घटाते और $+\triangle i$ को बढ़ाते हैं ; $\pm\triangle i$ की यह आंशिक या पूर्ण उत्क्रमणीयता भित्ति पृष्ठ की उत्क्रमणीय अनुकूलनता को सूचित करती है। विरामावधि तथा तापन अभिक्रियाओं के द्वारा $+\triangle i$ में वृद्धि और $-\triangle i$ में ह्रास होने से प्रकट होता है कि ये प्रक्रम कालप्रभावन-विरोधी प्रभाव उत्पन्न करने में समर्थ हैं। अस्तु, यह स्वाभाविक विचार उत्पन्न हुआ कि इन प्रक्रमों के तुलनात्मक अध्ययन से यह मार्गनिर्देशन हो सकेगा कि ये प्रक्रम $\pm\triangle i$ में किस सीमा तक परिवर्तन लाने में समर्थ हैं। अतः प्रस्तुत लेख में उल्लिखित कार्य का मुख्य उद्देश्य, $\pm\triangle i$ पर पूर्व-कालप्रभावन तापन, पूर्व-तापन कालप्रभावन तथा पूर्व-विरामावधि तापन के प्रभाव का तुलनात्मक अध्ययन करना है। तापन तथा विरामावधि में से कौन अधिक कालप्रभावन-विरोधी प्रभाव उत्पन्न करने में समर्थ है इसका ज्ञान प्राप्त करने के लिए पूर्व-विरामावधि तापन प्रक्रम का अध्ययन करने का प्रयास किया गया।

प्रयोगात्मक

लेखक द्वारा पूर्व प्रकाशित लेख[2] में प्रयुक्त विधि का प्रस्तुत प्रयोग में अनुसरण किया गया। प्रयोगशाला के ताप पर $\pm\triangle i-V$ अभिलाक्षणिकों का अभिलेखन करने के पश्चात्, पूर्व-कालप्रभावन तापन संबंधी प्रयोगों के लिए, हैलोजेन (Cl_2/Br_2) पूरित ओज़ोनित्रों को 80 से० पर एक घंटे तक गर्म किया गया। तब उन्हें बिजली के पंखे से उत्पन्न शीतल वायु के झोंकों के द्वारा द्रुत गति से ठंडा किया गया और विभिन्न विभवों पर $\pm\triangle i$ का प्रेक्षण किया गया। तत्पश्चात् उनका प्रयोगशाला के ताप पर, V_m से तनिक ऊपर के विभव पर एक घंटे तक कालप्रभावन करके, अंत में विभिन्न विभवों पर $\pm\triangle i$ का अभिलेखन किया गया।

पूर्व-तापन कालप्रभावन के अध्ययन के लिए ओज़ोनित्रों का V_m के समीप के विभव पर एक घंटे तक कालप्रभावन किया गया ; कालप्रभावन के पूर्व तथा पश्चात् विभिन्न विभवों पर $+\triangle i$ का प्रेक्षण किया गया। तब उन्हें 80° से० पर एक घंटे तक गर्म करके, शीघ्रता से ठंडा करने के पश्चात्, $\pm\triangle i$ का अभिलेखन किया गया।

पूर्व-विरामावधि तापन संबंधी प्रयोगों के लिए, ओज़ोनित्रों को 80° से० पर एक घंटे तक गर्म किया गया। गर्म करने के पूर्व तथा एक घंटा गर्म करने के अंत में, ओज़ोनित्रों को अचानक ठंडा करने के पश्चात्, $\pm\triangle i$ का अवलोकन किया गया। तत्पश्चात्, उनके एक घंटे के विरामकाल के अंत में, $\pm\triangle i$ का अभिलेखन किया गया।

परिणाम तथा विवेचन

हैलोजेनों में पूर्व-कालप्रभावन तापन क्रिया संबंधी प्रेक्षणों से प्रदर्शित होता है कि तापन के कारण $+\triangle i$ बढ़ गया तथा कालप्रभावन से लगभग पूर्व परिमाण तक घट गया ; जबकि तापन के कारण $-\triangle i$ घट गया और कालप्रभावन से अंशतः या पूर्णतः प्रारंमाण मान तक बढ़ गया। तापन से ब्रोमीन ओज़ोनित्र में $-\triangle i$ पूर्णतः तिरोहित हो गया। पूर्व-तापन कालप्रभावन संबंधी परिणामों से प्रकट होता है कि कालप्रभावन से $+\triangle i$ घट गया तथा तापन से आंशिक या पूर्ण रूप से बढ़ गया ; कालप्रभावन से $-\triangle i$ में वृद्धि तथा तापन से लगभग प्रारंभिक मान तक ह्रास हुआ। विराम तथा पूर्व-विरामावधि तापन के परिणामों से स्पष्ट होता है कि इन दोनों प्रक्रमों से $+\triangle i$ में वृद्धि तथा $-\triangle i$ में ह्रास हुआ ; तथापि, विराम की तुलना में, समान अवधि के तापन के द्वारा, $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तन, अधिक प्रभावी थे।

लेखक द्वारा इसकी भलीभाँति स्थापना की जा चुकी है कि ओज़ोनित्र का ताप बढ़ाने से $-\triangle i$ घट जाता है[1]। $\pm\triangle i$ अनिवार्यतः एक पृष्ठीय क्रिया है, अतः तापन के कारण $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तन, भित्ति पृष्ठ में होने वाले परिवर्तन को सूचित करता है। पृष्ठ अधिशोषित परत में कुछ ऐसे परिवर्तन होते हैं, जिनकी प्रकृति और आचरण, जिनका जोशी[3] ने बलपूर्वक उल्लेख किया है, $\pm\triangle i$ के लिए मौलिकतः उत्तरदायी हैं।

तापन के कारण अधिशोषित परत के अभिलाक्षणिकों में उत्पन्न परिवर्तन, अधिशोषण के प्रकार पर भी निर्भर होता है। वान्डर वाल्स प्रकार के अधिशोषण में, ताप की वृद्धि अधिशोषण के परिमाण को घटा देती है, और उच्च ताप पर इसकी अस्थिरता से भी, जिसकी परिणति पूर्णतः उन्मूलन में होती है, यह अभिलक्षित होता है। यदि यह मान लिया जाये कि अधिशोषित परत ही एकमात्र सारणिक है, जबकि अन्य प्राचल स्थिर हों, तो वान्डर वाल्स अधिशोषण तात्क्षणिक तथा उत्क्रमणीय[4] होने के कारण, ताप के एक बार पुनः घटाने से $\pm\triangle i$ में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहिए। प्रस्तुत परिणाम इंगित करते हैं कि पृष्ठ परत एक विशुद्ध वान्डर वाल्स परत मात्र ही नहीं है। क्योंकि तापन, काल-प्रभावन तथा विरामावस्था से $\pm\triangle i$ में परिवर्तनों का प्रेक्षण हुआ है, अतः ऐसी संभावना है कि आरोपित

विद्युतीय क्षेत्र द्वारा प्रदत्त सक्रियण ऊर्जा अपेक्षी रासायनिक-अधिशोषण कांच की भित्तियों पर होता है[5]। यद्यपि कालप्रभावन के द्वारा $-\triangle i$ में वृद्धि और निकाय की विरामावस्था तथा तापन से $-\triangle i$ में ह्रास, पृष्ठ पर रासायनिक अधिशोषण के अनुकूल होता है, तथापि उत्तेजन पर $\pm\triangle i$ की तात्कालिक उत्पत्ति, किसी निकाय से संबद्ध अवशिष्ट $\pm\triangle i$ तथा V_m से नीचे $+\triangle i$ की उत्पत्ति, ताप के साथ इसकी वृद्धि एवं $V>V_m$ पर विसर्जन के सतत प्रवाहन के साथ इसका ह्रास इंगित करते हैं कि अधिशोषित परत के प्रेक्षित अभिलाक्षणिकों के लिए भौतिक अधिशोषण भी अंशतः उत्तरदायी है।

ओज़ोनित्र के इलेक्ट्रोडों की परावैद्युत प्रकृति के कारण, विद्युतीय उत्तेजित पृष्ठ पर सक्रिय केन्द्र विकसित हो जाते हैं। विसर्जन के प्रवाहन से या विरामकाल में आरोपित क्षेत्र के पूर्णतः अपहरण के द्वारा उत्पन्न विकृति या कोई अन्य कारक इन बिन्दुओं को पर्याप्त प्रभावित करेंगे। एक चक्र पूर्ण होने पर ये केन्द्र कुछ अवशिष्ट आवेश धारण कर लेते हैं, जोकि इसके पूर्ववर्ती इतिहास, विविध केन्द्रों में आवेश घनत्व, सक्रिय बिन्दुओं के विस्तार तथा इन बिन्दुओं में आवेश की अवस्थिति से प्रतिबंधित होता है। इससे एक विकृति विकसित होती है जोकि विरामकाल या तापन अभिक्रिया के दौरान विकृतिमुक्त या शिथिल होती जायेगी। ऐसा देखा गया है कि कालप्रभावन के द्वारा $-\triangle i$ में हुई वृद्धि को तापन द्वारा अंशतः या पूर्णतः विनष्ट किया जा सकता है तथा पुनः कालप्रभावन द्वारा $-\triangle i$ को पुनः स्थापित किया जा सकता है[6]।

यह ज्ञात है कि हैलोजेन सदृश क्रियाशील गैसों की विसर्जन नली की भित्तियों के लिए रासायनिक बंधुता होती है[1]। यह स्वाभाविक है कि भौतिक अवस्थाओं में तनिक विक्षोभ होने से अधिशोषी और अधिशोष्य के मध्य उत्पन्न साम्य गहन सीमा तक विक्षुब्ध किया जा सकता है। रासायनिक शोषण प्रकार के साम्य के लिए, ताप में थोड़ी-सी वृद्धि का परिणाम $-\triangle i$ के केवल अल्प मात्रा के ह्रास में होगा; किन्तु, विशेषतः ब्रोमीन के विषय में, $-\triangle i$ का लगभग पूर्णतः शमन सिद्ध करता है कि अधिशोषण बल भौतिक मूल के भी हैं। रासायनिक या संयोजकता बलों द्वारा निर्मित पृष्ठ यौगिक प्रायः ताप अवरोधी अधिक होते हैं। किन्तु, शुक्ल[7] के कथनानुसार क्लोरीन के लिए अधिशोषण-ऊष्मा 20 किलो-कैलोरी प्रति मोल कोटि की है, जोकि रासायनिक-शोषण के पक्ष में एक प्रबल प्रमाण है। ऐसी स्थितियाँ ज्ञात हैं जबकि $\pm\triangle i$ की उत्पत्ति के लिए घंटों का कालप्रभावन परमावश्यक होता है। पुनश्च, विसर्जन नली के संदलित भित्तिद्रव्य को गर्म करने से गैस के बुलबुले उत्पन्न होते हैं[7] जोकि, यदि अधिशोषण भौतिक प्रकृति का होता तो, वहाँ विद्यमान नहीं होने चाहिए थे।

पूर्व-विरामावधि तापन के द्वारा $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तनों के परिणामों से सुस्पष्ट है कि, यदि अवधि को अचर रखा जाये तो, कालप्रभावन की क्रिया के शमन के लिए, विरामावस्था की अपेक्षा तापन एक द्रुत प्रक्रम है। यह उल्लेखनीय है कि कालप्रभावन तथा तापन परस्पर विरोध क्रियाएँ हैं तथा जब तापन व कालप्रभावन की क्रियाओं को, एक नियत समय के लिए, स्वतंत्र रूप किया जाता है तो, $\pm\triangle i$ में परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए तापन की तुलना में कालप्रभावन अधिक प्रभावी होता है। अतः इन प्रक्रमों के द्वारा $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तनों के लिए उत्तरदायी कारक, अधिशोषित परत तथा गैस प्रावस्था के मध्य स्थित साम्य में परिवर्तन, प्रतीत होता है।

बाह्य विकिरण तथा विद्युत्-विक्षुब्ध पृष्ठ पर अधिशोषित प्रावस्था की पारस्परिक क्रिया से संबंधित लेखक के रूपांतरित सिद्धान्त[8] के आधार पर प्रस्तुत परिणामों की व्याख्या होती है। प्रारंभिक $\pm\triangle i$ तथा $V \ngtr V_m$ पर इसकी वृद्धि, आरोपित विद्युतीय क्षेत्र द्वारा वान्डर वाल्स परत के विशोषण के कारण है। V_m पर $+\triangle i$ अधिकतम है, जहाँ पर कि वान्डर वाल्स परत का विशोषण अधिकतम् होता है और रासायनिक शोषण का प्रारभ होता है। ज्योंही रासायनिक-शोषित परत विकसित होती है तथा अन्तराकाशी आवेश-प्रभाव के रूप में ऋण आयन निर्मित के कारण, V_m से ऊपर $\pm\triangle i$ के सह-अस्तित्व के कारण भी, कार्य-फलन में वृद्धि के परिणामस्वरूप, प्रकाश इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन में ह्रास से, $V > V_m$ पर $+\triangle i$ बहुत अधिक घट जायेगा[6]। इस प्रकार, जब अंतर्निहित $-\triangle i$ का मान अंतर्निहित $+\triangle i$ से अधिक हो जयेगा तो $+\triangle i$ का $-\triangle i$ में प्रतीपन हो जायेगा। कालप्रभावन के कारण रासायनिक शोषित परत का विकास होता है और ज्यहीं यह विकसित होगी कार्य फलन बढ़ जायेगा जिसके फलस्वरूप $+\triangle i$ में ह्रास तथा $-\triangle i$ में वृद्धि होगी। जब निकाय को विरामावस्था में छोड दिया जाता है तब भित्तियों पर अधिशोषित गैसीय प्रकृति के कणों में परस्पर मंद पृष्ठीय उत्प्रेरित क्रिया होती है,[8] जिससे कि कार्य-फलन में ह्रास तथा $+\triangle i$ में वृद्धि होती है ; जोकि प्रेक्षित $\triangle i$ को घटा देता है। साधारण प्रयोगशाला के ताप पर, सामान्यत: वान्डर वाल तथा आंशिक रासायनिक शोषित तलों के गैसीय कणों में पारस्परिक-क्रिया होती है। किन्तु जब विसर्जन नली को उच्च ताप तक गर्म किया जायेगा तो वान्डर वाल्स परत विलुप्त हो जायेगी तथा, ताप बढ़ने के कारण, पारस्परिक-क्रिया की दर बढ़ जायेगी। पारस्परिक-क्रिया तब, रासायनिकशोषित परत में विभिन्न स्थानों पर अधिशोषित गैसीय कणों में होगी। उच्च ताप पर पारस्परिक-क्रिया की दर में वृद्धि के कारण, साधारण ताप पर विरामावस्था में छोड़ने के प्रभाव की तुलना में, $\pm\triangle i$ में परिवर्तन शीघ्र होंगे। इससे स्पष्ट है कि, यदि ये प्रक्रम समान समय के लिये किये जाते हैं तो, विरामकाल मात्र की तुलना में, ताप अपेक्षी तापन क्रिया के द्वारा उत्पन्न कालप्रभावन-विरोधी प्रभाव अधिक होगा। पूर्व-कालप्रभावन तापन व पूर्व-तापन कालप्रभावन में, कालप्रभावन के कारण $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तनों का कालप्रभावन द्वारा जो पूर्णत: पुन: स्थापन नहीं होता है, वह संभवत: अपर्याप्त कालप्रभावन या तापन अवधि के कारण है ; क्योंकि काल प्रभावन के दौरान, सतत् विद्युतीय सक्रियित क्रियाशील गैसीय कण अति तीव्र दर से बमबारी करते हैं, जबकि अनुत्तेजित नली के तापन के दौरान, इस प्रकार की सक्रियित बमबारी नहीं होती है, अत: तापन की तुलना में कालप्रभावन अधिक शीघ्र प्रभावी क्रिया है। इसीलिए, कालप्रभावन या तापन से $\pm\triangle i$ में उत्पन्न परिवर्तनों का तापन या कालप्रभावन के द्वारा आंशिक या पूर्ण पुन: स्थापन होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के भूतपूर्व प्रवक्ता डा० एम० वेनुगोपालन का उनके अमूल्य सुझावों के लिए आभारी है।

निर्देश

1. प्रसाद, **पी-एच० डी० थीसिस, काशी हिन्दू वि० वि०**, 1961.

2. प्रसाद, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1972, **15**(**2**), 79.

3 जोशी, **करेन्ट साइंस**, 1947, **16**, 19.

4. ग्लास्टन, "**ए टेक्स्ट बुक ऑफ़ फ़िज़िकल केमिस्ट्री**" 1951, **मैकमिलन एंड कम्पनी**

5. टेलर, **नेचर**, 1928, **121**, 708.

6. ह्यूजिज एवं ड्यूब्रिज, "**फ़ोटोइलेक्ट्रिक फ़िनोमेना,**" 1932, **मैकग्रा हिल बुक कम्पनी**

7. शुक्ल, **जर्न० साइं० रिसर्च, काशी हिन्दू वि० वि०**, 1954-55, V (ii).

8. प्रसाद, **विज्ञान परिषद् ..नुसंधान पत्रिका**, (प्रेस में)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No 4, October, 1974, Pages 251-260

दो चरों वाले H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी

एम० पी० चौबीसा

गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—मार्च 9, 1973]

सारांश

इस शोधपत्र में दो चरों वाले H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी के तीन प्रसार प्राप्त किये गये हैं। पहले से प्राप्त फल हमारी विशिष्ट दशाओं के रूप में आते हैं।

Abstract

Fourier series for H-function of two variables. *By* M. P. Chobisa, Department of Mathematics, Uninversity of Udaipur, Rajasthan.

In this present note three Fourier series expansions for the H-function of two variables have been obtained. The results obtained by Mathur[6] are particular cases of our results and G, E and Appell's double hypergeometric functions etc. can also be obtained.

इस शोधपत्र का प्रमुख उद्देश्य दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी स्थापित करना है। दो चरों वाला सार्वीकृत H-फलन शर्मा का S-फलन[9], अग्रवाल का G-फलन[1], कैम्पे द फेरी का फलन[2], ऐपेल के फलन (F_1, F_2, F_3, F_4), ह्विट्टेकर फलन तथा दो चरों वाले अन्य विशिष्ट फलनों का सार्वीकरण है।

मुनोट तथा कल्ला[7] ने दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन को निम्नांकित प्रकार से परिभाषित किया है :

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} m_1, 0 \\ p_1-m_1, q_1 \end{bmatrix} & \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\} & x \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} & \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\} & \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} & \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} & y \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} F(\xi+\eta)\phi(\xi, \eta) x^{\xi} y^{\eta} \, d\xi \, d\eta \qquad (1\cdot1)$$

$\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}$ से प्राचलों के सेट $(a_1, A_1), \ldots, (a_{p_1}, A_{p_1})$ का बोध होता है। L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर हैं तथा

$$F(\xi+\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(a_j + A_j\xi + A_j\eta}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1} \Gamma(1-a_j - A_j\xi - A_j\eta) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(b_j + B_j\xi + B_j\eta)},$$

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(1-c_j + C_j\xi) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j - D_j\xi) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(1-e_j + E_j\eta) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j - F_j\eta)}{\prod_{j=m_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j\xi) \prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j + D_j\xi) \prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j\eta) \prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j + F_j\eta)}$$

यदि $p_1 \geqslant m_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant m_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant m_3 \geqslant 0$, $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant n_2 \geqslant 0$, $q_3 \geqslant n_3 \geqslant 0$, $q_1 + q_2 \geqslant p_1 + p_2$, $q_1 + q_3 \geqslant p_1 + p_3$ तथा p, m और n सभी धन पूर्णांक हैं।

इस शोधपत्र में निम्नांकित संक्षिप्त रूपों का सर्वत्र प्रयोग किया जावेगा।

(i) $\{(ap_1)\} \equiv a_1, a_2, \ldots, ap_1$,

(ii) $\theta_1 \equiv \sum_1^{p_1} A_j + \sum_1^{p_2} C_j - \sum_1^{q_1} B_j - \sum_1^{q_2} D_j$.

(iii) $\phi_1 \equiv \sum_1^{p_1} A_j + \sum_1^{p_3} E_j - \sum_1^{q_1} B_j - \sum_1^{q_3} F_j$,

(iv) $\theta_2 \equiv \sum_{1}^{m_1} A_j - \sum_{m_1+1}^{p_1} A_j - \sum_{1}^{q_1} B_j + \sum_{1}^{m_2} C_j - \sum_{m_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{1}^{n_2} D_j - \sum_{n_2+1}^{q_2} D_j$

(v) $\phi_2 \equiv \sum_{1}^{m_1} A_j - \sum_{m_1+1}^{p_1} A_j - \sum_{1}^{q_1} B_j + \sum_{1}^{m_3} E_j - \sum_{m_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{1}^{n_3} F_j - \sum_{n_3+1}^{q_3} F_j$

2. आगे निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी :

(i) एर्डेल्यी[4, p. 3 (4)]

$$\frac{\Gamma(-z+r)}{\Gamma(-z)} = \frac{(-1)^r \Gamma(z+1)}{\Gamma(1+z-r)}, \tag{2·1}$$

(ii) रूपनारायण [8, p. 1084 (2·2)]

$$\frac{(\pi)^{1/2}\Gamma(s+1)(\cos\theta/2)^{2s}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} = 1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r(-s)_r \cos r\theta}{(s+1)_r} \tag{2·2}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \; R(s) \geqslant \tfrac{1}{2}$$

(iii) मैकराबर्ट [5]

$$\frac{(\pi)^{1/2}\Gamma(-s)(\sin\theta/2)^{-2s}}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} = 1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(s)_l \cos l\theta}{(1-s)_l} \tag{2·3}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \; R(s) \leqslant \tfrac{1}{2}$$

(iv) मैकराबर्ट [5]

$$\frac{(\pi)^{1/2}\Gamma(2-s)(\sin\theta)^{1-2s}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-s)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(s)_l \sin(2l+1)\theta}{(2-s)_l} \tag{2·4}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \; R(s) \leqslant \tfrac{1}{2}$$

शर्मा[9] के फलन $S(x, y)$ तथा अग्रवाल[1] के G-फलन की परिभाषा के द्वारा (1·1) से निम्नांकित समिकायें निकलती हैं ।

(v)

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, 0 \\ p_1-m_1, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3, \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix}\end{matrix} \left| \begin{matrix} \{(a_{p_1}, 1)\}; \{(b_{q_1}, 1)\} \\ \{(c_{p_2}, 1)\}; \{(d_{q_2}, 1)\} \\ \{(e_{p_3}, 1)\}; \{(f_{q_3}, 1)\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, 0 \\ p_1-m_1, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix}\end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}); (b_{q_1}) \\ (c_{p_2}); (d_{q_2}) \\ (e_{p_3}); (f_{q_3}) \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\right] \tag{2·5}$$

(vi)

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, 0\\ p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_2\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, 1)\}; \{(bq_1, 1)\}\\ \{(c_{p_2}, 1)\}; \{(d_{q_2}, 1)\}\\ \{(e_{p_3}, 1)\}; \{(f_{q_3}, 1)\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right] G p_{1,(p_2:p_3),q_1,(q_2:q_3)}^{1, 2, m_3, n_2, n_3}\left[\begin{matrix}\\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-a_{p_1})\\ (1-c_{p_2}); (1-e_{p_3})\\ (b_{q_1})\\ (d_{q_2}); (f_{q_3})\end{matrix}\right.\right] \tag{2·6}$$

(vii)

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, 0\\ p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_{p_1}); (b_{q_1})\\ (c_{p_2}); (d_{q_2})\\ (e_{p_3}); (f_{q_3})\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right] = G_{p_1,(p_2:p_3),q_1,(q_2:q_3)}^{n_1, m_2, m_3, n_2, n_3}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(1-a_{p_1})\}\\ \{(1-c_{p_2})\}; \{(1-e_{p_3})\}\\ (b_{q_1})\\ (d_{q_2}); (f_{q_3})\end{matrix}\right.\right] \tag{2·7}$$

3. यहां पर निम्नांकित मुख्य परिणामों की स्थापना की गई है :

(i)

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, 0\\ p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_2\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2}. C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\cos^2\theta/2\\ \\ y\cos^2\theta/2\end{matrix}\right]$$

$$=(\pi)^{-1/2} H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1, 0\\ p_1-m_1, q_2+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}, 1), \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}, (1, 1)\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$+2(\pi)^{-1/2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{2l}\cos l\theta$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+2,\ 0 \\ p_1-m_1,\ q_1+2\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_2,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(\tfrac{1}{2},1),(1,1),\{(a_{p_1},A_p)\};\{(b_{q_1},B_{q_1})\},(1\pm l,1) \\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x \\ \\ y\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

(ii)

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1,\ 0 \\ 1+p_1-m_1,\ q_1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(a_{p_1},Ap_1)\},(\tfrac{1}{2},1);\{(b_{q_1},B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}\theta \\ \\ y\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}\theta\end{matrix}\right]$$

$$=(\pi)^{-1/2}H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1,\ 0 \\ 1+p_1-m_1,\ q_1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(a_{p_1},A_{p_1})\},(0,1);\{(h_{q_1},B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\} \\ \{(e_{p3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x \\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$+2(\pi)^{-1/2}\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\theta$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+1,\ 0 \\ 1+p_1-m_1,\ q_1+1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}(l,1),\{(a_{p_1},Ap_1)\},(-l,1);\{(b_{q_1},B_{q_1})\},(0,1) \\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x \\ \\ y\end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

(iii)

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}, (-\tfrac{1}{2}, 1); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}, \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x \operatorname{cosec}^2\theta\\ y \operatorname{cosec}^2\theta\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{2(\pi)^{-1/2}}{\sin\theta}\sum_{l=0}^{\infty}\sin(2l+1)\theta$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(l, 1), \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}, (-1-l); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}, (0, 1)\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

(3 1) **की उपपत्ति** : हमें ज्ञात है कि

$$H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, 0\\ p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\cos^2\tfrac{1}{2}\theta\\ y\cos^2\tfrac{1}{2}\theta\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}F(\xi+\eta)\phi(\xi,\eta)x^{\xi}y^{\eta}(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\xi+2\eta}\,d\xi\,d\eta$$

परिणाम (2·1) तथा (2·2) का प्रयोग करते हुये (3·4) में दाहिनी ओर के समाकलन आर संकलन के क्रम को उलटने पर तथा (1·1) का व्यवहार करने पर वांछित फल प्राप्त होता है ।

समाकलन तथा संकलन के क्रम को उलटना संभव है क्योंकि

(i) (1.1) में कथित प्रतिबन्धों के सेट के अन्तर्गत द्विगुण कंटूर समाकल अभिसारी हैं ।

(ii) श्रेणी $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l(-\xi-\eta)_l \cos l\theta}{(\xi+\eta+1)l}$

समान रूप से अभिसारी है यदि $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

(iii) दो चरों का H-फलन x तथा का y संतत फलन है।

फलतः समाकलन तथा संकलन के क्रम का उलटना विहित है [3 p. 500]।

(3·2) तथा (3·2) की उपपत्तियाँ :

(3·2) तथा (3·3) की उपपत्तियाँ (3·1) के ही समान है। अन्तर केवल इतना है कि परिणाम (2·3) तथा (2·4) प्रयुक्त होते हैं।

विशिष्ट दशायें

यदि हम समस्त A_j, B_j, C_j, D_j, E_j और F_j को इकाई के तुल्य रखें और (3·1), (3·2) तथा (3·3) में (2·5) का उपयोग करें तो शर्मा के S-फलन के परिणाम प्राप्त होते हैं।

(ii) पुनः (3·1), (3·2) तथा (3·3) में (2·6) का उपयोग करते हुये $1-a_{p_1}=a_{p_1}$; $1-c_{p_2}=c_{p_2}$; $1-e_{p_3}=e_{p_3}$ को प्रतिस्थापित करने पर माथुर[6] द्वारा दिया गया परिणाम प्राप्त होता है।

5. समाकल

(3·1), (3·2) तथा (3·3) फलों से निम्नांकित परिमित समाकल व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

$$\int_0^{\pi} H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1, 0 \\ p_1-m_1, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x\cos^2 \frac{1}{2}\theta \\ y \cos^2 \frac{1}{2}\theta \end{matrix} \right] \cos l\theta \, d\theta$$

$$=(\pi)^{1/2} \; H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1+2, 0 \\ p_1-m_1, q_1+2 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (\frac{1}{2}, 1), (1, 1), \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}, (1\pm l, 1) \\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] \tag{5·1}$$

$$\int_0^\pi H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}, (\tfrac{1}{2}, 1); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} x\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}\theta\\ \\ y\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}\theta\end{matrix}\right]\cos l\theta\, d\theta$$

$$=(\pi)^{1/2} H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-m_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(l, 1), \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}, (-l, 1); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}, (0, 1)\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{q_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} x\\ \\ y\end{matrix}\right] \tag{5·2}$$

$$\int_0^\pi H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\{(a_{p_1}, A_{p_1})\}, (-\tfrac{1}{2}, 1); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} x\operatorname{cosec}^2\theta\\ \\ y\operatorname{cosec}^2\theta\end{matrix}\right]\frac{\sin(2l+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$

$$=(\pi)^{1/2} H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+1, 0\\ 1+p_1-m_1, q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_2, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(l, 1), \{(a_{p_1}, A_{p_1})\}; (-1-l, 1); \{(b_{q_1}, B_{q_1})\},\\ (0, 1)\\ \{(c_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} x\\ \\ y\end{matrix}\right] \tag{5·3}$$

उपपत्तिः

(5·1) तथा (5·2) प्राप्त करने के लिये (3·1) तथा (3·2) को $\cos m\theta$ से गुणा करते हैं और 0 से π तक समाकलित करते हैं। (5·3) के लिये $\sin(2m+1)\theta$ से गुणा और 0 से π तक समाकलित करते हैं।

विशिष्ट दशायें

(i) यदि समस्त A_j, B_j, C_j, D_j, E_j और F_j को इकाई के बराबर रखें और (5·1), (5·2) तथा (5·3) में (2·5) का उपयोग करें तो शर्मा के S-फलन के परिमित समाकल प्राप्त होते हैं।

(ii) (5·1), (5·2) तथा (5·3) में (2·6) को प्रयुक्त करने तथा सर्वत्र $1-a_{p_1}=a_{p_1}$; $1-c_{p_2}=c_{p_2}$ और $1-e_{p_3}=e_{p_3}$ प्रतिस्थापित करने पर माथुर द्वारा दिये गये फल प्राप्त होते हैं।

6. आवर्तन सम्बन्ध

यदि हम (5·3) में $\frac{1}{2}\{\cos 2l\,\theta-\cos(2l+2)\theta\}$ के स्थान पर $\sin(2l+1)\theta\sin\theta$ रखें और θ के स्थान पर 2θ रखकर फल (3·2) का उपयोग करें तो निम्नांकित परिणाम मिलता है।

$$2\,H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1,\,0\\ 1+p_1-m_1,\ q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,\ n_2\\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,\ n_3\\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(l,1),\{(a_{p_1},A_{p_1})\},(-1-l,1);\{(b_{q_1},B_{q_1})\},(0,1)\\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$=H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1,\,0\\ 1+p_1-m_1,\ q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,\ n_2\\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,\ n_3\\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(l,1),\{(a_{p_1},A_{p_1})\},(-l,1);\{(b_{q_1},B_{q_1})\},(0,1)\\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\}\\ \{(ep_3,E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$-H\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1,\,0\\ 1+p_1-m_1,\ q+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,\ n_2\\ p_2-m_2,\ q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,\ n_3\\ p_3-m_3,\ q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+l,1),\{(a_{p_1},A_{p_1})\},(-1-l,1);\{(b_{q_1},B_{q_1})\},(0,1)\\ \{(c_{p_2},C_{p_2})\};\{(d_{q_2},D_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\};\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right] \quad (6\cdot1)$$

विशिष्ट दशायें

(i) (6·1) में समस्त A_j, B_j, C_j, E_j, D_j और F_j को इकाई के तुल्य रखकर तथा (2·5) का उपयोग करने पर शर्मा के S-फलन के परिणाम प्राप्त होते हैं।

(ii) यदि हम (6·1) में (2·6) को व्यवहृत करें तथा (6·1) में $1-a_{p_1}=a_{p_1}$, $1-c_{p_2}=c_{p_2}$; $1-e_{p_3}=e_{p_3}$ प्रतिस्थापित करें तो माथुर द्वारा दिया गया आवर्ती समबन्ध प्राप्त होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० सी० जैन के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने मार्ग-दर्शन किया ।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रेसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **31A**, 536-46
2. ऐपेल तथा कैम्पे द फेरी, Functions Hypergeometriqus et Phypers Pheriques, Poylnomes d' Hermite Gauthier Villars, पेरिस 1926
3. ब्रामविच, टी० जे० आई०, An Introduction to the Theory of Infinite series, **मैकमिलन लन्दन**, 1931
4. एर्डेल्यी, ए०, Higher Trans Functions, भाग I मैकग्राहिल न्यूयार्क 1954
5. मैकराबर्ट, सी० एम०, **मैथ० जर्न०**, 1959, **71**, 143-45
6 माथुर, ए० बी०, **मैथमैटिक्स एजुकेशन**, 1969, **3 (1)**, भारत
7 मुनोट तथा कल्ला, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, (प्रकाशवाधीन)
8. रूप नारायण, Compo. Maths, **17**, 2
9 शर्मा बी० एल०, Annals de Soc. Sci. de Bruxelles 1965, **79**, 26-40

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October, 1974, Pages, 261-270

परक्लोरिक अम्ल में Cr(VI) द्वारा आक्सैलेट आयन के उपचयन का अणुगतिक अध्ययन

वी० एन० भटनागर तथा पी० जी० संत
मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल, तथा राजकीय विद्यालय, खरगोन

[प्राप्त—मई 3, 1974]

सारांश

आक्सैलेट आयन के उपचयन की अणुगतिकी का अध्ययन परक्लोरिक अम्ल के माध्यम में किया गया। अभिक्रिया की कोटि उपचायक के सापेक्ष एक तथा आक्सैलेट आयन के सापेक्ष दो पायी गई है। Cr(VI) की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन बताता है कि $HCrO_4^-$-सक्रिय उपचायक कण है जबकि H^+ की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन दर्शाता है कि $k_1 \propto \sqrt{H^+}$। अनुप्रेरित अभिक्रिया की सक्रिय-ऊर्जा 13 कि० कै०/मोल प्राप्त होती है जो आक्सैलिक अम्ल में C C बंध के विखण्डन के लिए आवश्यक ऊर्जा से लगभग 35-55 कि० कै० मोल कम है। सक्रियण ऊर्जा में इस कमी का कारण उपसहसंयोजकता होना चाहिये तथा उपसहसंयोजकता की अनुपस्थिति में सक्रियण ऊर्जा का मान कहीं बहुत अधिक होना चाहिये। संकुलकारकों का उपयोग करने पर अभिक्रिया वेगमें प्रभावी वृद्धि की व्याख्या-इलेक्ट्रान परिवर्तन के रूप में की गई है। अपचयन का क्रम Cr (VI)→Cr (IV)→(Cr (II) प्रदर्शित किया गया है। सारे प्रयोग वायु की उपस्थिति में किये जाने के कारण माना जा सकता है कि अंतिम पद में Cr(II) वायुमंडलीय आक्सीजन द्वारा तत्काल उपचितहो जाता है।

Abstract

Kinetics of oxidation of oxalate ion by chromium(VI) in perchloric acid medium. *By* V. N. Bhatnagar, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal and P. G. Sant, Government College, Khargone.

Kinetics of oxidation of oxalate ion was studied in perchloric acid medium. Order of the reaction is one with respect to oxidant and two with respect to substrate. Variation of rate with concentration of Cr (VI) shows that $HCrO_4^-$ is the active oxidising species. Study of the variation of rate with respect to hydrogen ion con-

centration shows that $k_1 \propto \sqrt{H^+}$. The energy of activation of uncatalysed reaction estimated from the variation of rate constant with temperature is of the order of 13 Kcals/mole, some 35 to 55 Kcals/mole less than the energy required to break the C—C bond in oxalic acid. Co-ordination is responsible for lowering in activation energy by this amount; and that without co-ordination, the activation energy would be far too high for the reaction to proceed. The apparent increase of reaction rate on adding complexing agents has been explained as due to a 2-electron transfer reaction. The course of the reduction has been represented as Cr(VI)→Cr(IV)→Cr(II). Since all experiments are performed in presence of air, it is reasonable to expect that Cr(II) in the last stage is subsequently oxidised to Cr(III) in presence of atmospheric oxygen.

अनेक आक्सी आयनों-HOCl[1], HOBr[2, 3] तथा HOI[4] द्वारा आक्सैलेट आयन का अध्ययन किया गया है। जोन्स, वाटर्स[5] एवं बाकोरे[6] ने आक्सैलिक अम्ल के वैनेडियम (V) द्वारा उपचयन का अध्ययन किया। चक्रवर्ती तथा घोष[7] ने, आयनों की उपस्थिति में, आक्सैलिक अम्ल तथा अम्लीय डाइक्रोमेट की अभिक्रिया का अध्ययन अवशोषणमिति द्वारा किया। कुरुपिका तथा केडलाक[8] ने पोलैरोग्राफी विधि द्वारा तथा ग्यानी तथा सुखनन्दन प्रसाद[9] ने विभवमिति द्वारा क्रमशः कार्बनिक यौगिकों के उपचयन के वेग का तथा मेंडेलिक अम्ल-अम्लीय डाइक्रोमेट निकाय पर Mn (II) आयनों के प्रभाव का अध्ययन किया। धर[10] ने बताया आक्सैलेट तथा षट्संयोजी क्रोमियम के बीच होने वाली मंद अभिक्रिया को Mn (II) आयन द्वारा उत्प्रेरित किया जा सकता है। उसके अनुसार सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थिति में इस अभिक्रिया की कोटि बहुत अधिक होती है—क्रोमिक अम्ल के सापेक्ष एक अणुक तथा आक्सैलेट के सापेक्ष त्रिअणुक। जोब्लेजन्स्की[11] तथा वागनर[12] ने इस अभिक्रिया को क्रमशः अनेक पदों में होने वाली तथा अनेक मध्यग-उत्पादों के निर्माण के साथ चलने वाली बताया है। प्रस्तुत शोध पत्र में हमने इस अभिक्रिया-कोटि पर संकुलकारकों का प्रभाव भी ज्ञात किया है।

प्रयोगात्मक

सामग्री : क्रोमिक अम्ल का विलयन 'बेकर ऐनेलाइस्ड' क्रोमियम ट्राइआक्साइड को आसुत जल में विलीन करके बनाया गया है तथा इसका मानकीकरण अयोडीमिति अनुपातों द्वारा किया गया। परक्लोरिक अम्ल (रीडेल) का मानकीकरण सोडियम-हाइड्राक्साइड (ए० आर०) के मानक विलयन द्वारा किया गया। सोडियम आक्सैलेट ई० मर्क० कोटि का उपयोग में लाया गया। अन्य सभी अभिकर्मक शुद्ध विशिष्टता वाले थे।

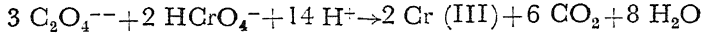
अणुगतिक मापन : अभिक्रियाएं कांच की डाट से युक्त, बाहर से काली रंगी बोतलों में स्थिर ताप (+0·02°C) पर सम्पन्न की गयीं। अभिकर्मक पदार्थ का ताप, ताप-स्थापी के ताप के बराबर करने के बाद इसी के ताप पर ही अभिक्रिया बोतलों में मिलाया गया। समय के एक निश्चित अंतराल पर सम भाग निकाले गये और उनमें अनभिकृत की सांद्रता आयोडीमिति द्वारा ज्ञात कर ली गयी।

आयोडाइड के वायु द्वारा उपचयन से बचाव के लिये वांछित सावधानी बरती गयी[13]। हाइड्रोजन आयन की सांद्रता के लिये परक्लोरिक अम्ल तथा स्थिर आयनिक सांद्रता के लिये सोडियम परक्लोरेट का उपयोग किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

1. (अ) **उपचयन**

आक्सैलेट के क्रोमिक अम्ल द्वारा उपचयन के फलस्वरूप कार्बन डाइआक्साइड गैस उत्पन्न होती है। इस अभिक्रिया को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$3\,C_2O_4^{--}+2\,HCrO_4^{-}+14\,H^{+}\rightarrow 2\,Cr\,(III)+6\,CO_2+8\,H_2O$$

(आक्सेलेट के प्रति ग्राम अणु के लिये क्रोमिक अम्ल का 1·5 ग्राम अणु लगता है।)

(ब) **वेग नियम :** जब आक्सैलेट एवं हाइड्रोजन आयनों की सांद्रता उच्च होती है तो Cr (VI) के विलोप होने का वेग प्रथम कोटि का होता है (चित्र 1)।

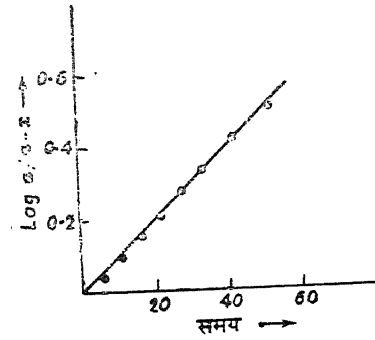
सारणी 1

$[Cr\,(VI)]=2\,0\times 1^{-3}$ M

$[C_2O_4^{--}]=50{\cdot}0\times 10^{-3}$ M

$[H^{+}]=0{\cdot}18$ M

ताप = :0° से०

$\mu=0{\cdot}50$ M

चित्र 1

समय मिनिटों में	$(a-x)$	$k_1\times 10^3$ प्रति मिनिट
0	5·72	—
5	5·02	26·0
10	4·46	24·8
15	3·92	25·1
20	3·40	25·9
25	2·96	26·3
30	2·68	25·2
40	2·04	25·7
50	1·60	25·4 ग्राफ से : $25{\cdot}5\times 10^{-3}$

2. Cr (VI) की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

Cr (VI) की सांद्रता बढ़ाने पर वेग नियतांक क्रमशः कम होता जाता है ।

सारणी 2

$[C_2O_4^{--}] = 40 \times 10^{-3}$ M ताप = 30° से०

$[H^+]$ = 0·18 M μ = 0·50 M

$[Cr\ (VI)] + 10^3$ ग्राम अणु प्रति लीटर	$k_1 \times 10^3$ प्रति मिनिट	$[HCrO_4^-] \times 10^4$	$10^2 k_1 (Cr\ (VI)]/[HCrO_4^-]$
1·0	18·4	9·24	1·99
2·0	16·4	17·46	1·88
4·0	15·2	31·70	1·91
7·0	13·5	49·56	1·90
10·0	11·5	64·90	1·77

सारणी 2 में दिये गये परिणाम बताते हैं कि वेग $HCrO_4^-$ की सांद्रता के समानुपाती है। $HCrO_4^-$ के मान, डाइक्रोमेट निर्माण के लिये निर्माण-नियतांक का मान $2{\cdot}4 \times 10^{-2}$ M[14] मान कर परिकलित किये गये हैं ।

यह बताया जा सकता है कि जब Cr (VI) > K|8, अर्थात् $3\ 0 \times 10^{-3}$ M, $HCrO_4^-$ की सांद्रता, क्रोमियम (VI) की कुल सांद्रता के बराबर होती है । प्रस्तुत परिणाम बताते हैं कि $HCrO_4^-$ सक्रिय उपचायक कण है ।

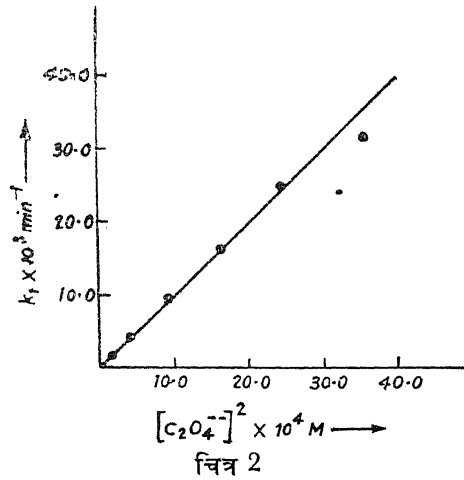
3. आक्सैलेट आयन की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

सारणी 3

$[Cr\ (VI)] = 2{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[H^+]$ = 0·18 M

ताप °03= से०

μ = 0·50 M

चित्र 2

$[C_2O_4^{--}] \times 10^3$ ग्राम अणु प्रति लीटर	$k_1 \times 10^3$ प्रति मिनिट	$k_1/[C_2O_4^{--}]^2$
10·0	1·05	10·5
20·0	4·60	11·5
30·0	9·20	10·2
40·0	16·40	10·2
50·0	25·50	10·2
60·0	32·20	9·0

सारणी 3 के प्रेक्षण से स्पष्ट है कि ग्राक्सैलेट ग्रायन की सांद्रता में परिवर्तन के साथ $k_1/[C_2O_4^{--}]^2$ स्थिर रहता है। अतः ग्राक्सैलेट आयन के सापेक्ष वेग की कोटि दो है।

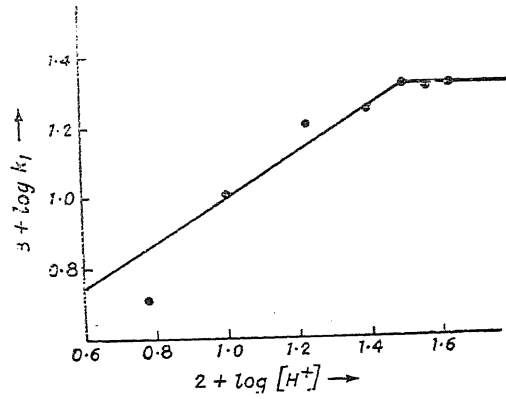
4. हाइड्रोजन ग्रायन की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

सारणी 4

$[Cr(VI)] = 2{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[C_2O_4^{--}] = 40{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

ताप $= 30°$ से०

$\mu = 0{\cdot}50$ M

चित्र 3

$[H^+] \times 10^2$ ग्राम अणु प्रति लीटर	$k_1 \times 10^3$ प्रति मिनिट	$2+\log[H^+]$	$3 \neq \log k_1$
6·0	5·06	0·7782	0·7042
12·0	12·53	1·0972	1·0979
18·0	16·40	1·2553	1·2148
24·0	18·40	1·3802	1·2648
30·0	20·00	1·4771	1·3010
36·0	20·00	1·5563	1·3010
42·0	20·00	1·6232	1·3010

चित्र 3 में $\log k_1$ तथा $\log [H^+]$ के मध्य आरेख प्रस्तुत किया है। आरेख के प्रे [illegible] होता है कि $HClO_4$ की सांद्रता बढ़ाने पर वेग H^+ की सांद्रता से प्रभावित नहीं होता। आरेख की रेखा के ढलान (slope) के मान से हाइड्रोजन आयन के सापेक्ष वेग की कोटि 0·5 प्राप्त होती है, अर्थात् $k_1 \propto \sqrt{H^+}$

5. **उपचयन वेग पर Mn (II) आयनों का प्रभाव**

सारणी 5

$[Cr\ (VI)] = 2{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M ताप $= 30°$ से०

$[C_2O_4^{--}] = 20{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M $\mu = 0{\cdot}5$ M

$[H^+] = 0{\cdot}18$ M

$[Mn\ (II)] \times 10^5$ ग्राम अणु प्रति लीटर	$k_1 \times 10^3$ प्रति मिनिट	$k_0 \times 10^2$
0·0	4·60	—
1·5	9·77	—
2·5	11·04	—
5·0	20·30	—
7·5	—	11·3
10·0	—	16·7

6. **संकुलकारकों का वेग पर प्रभाव**

सारणी 6

$[Cr\ (VI)] = 2{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M ताप $= 30°$ से०

$[C_2O_4^{--}] = 40{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M $\mu = 0{\cdot}50$, M

$[H^+] = 0{\cdot}18$ M

संकुलकारक		$k_1 \times 10^3$ प्रति मिनिट	
—	—	16·40	—
पिरिडीन	0·01 M	14·95	
2,2′ बाइपरिडिल	0·000256 M	18·40	
आर्थो फिनान्थ्रोलीन	0·000707 M	19·0	

क्षारकों द्वारा उत्प्रेरण प्रभाव का ग्रध्ययन बताता है कि अभिक्रिया पिरिडीन द्वारा उत्प्रेरित नहीं होती, जबकि बाइपिरिडिल तथा आर्थो फिनान्थ्रोलीन इसे उत्प्रेरित करते हैं[15]। यह संभव है कि बाइपिरिडिल-निकाय में अनुनाद अभिक्रिया की (संक्रमण) अवस्था का स्थायीकरण करता है, जैसा कि ट्रांस-$CO(X-P_y)_4cl_2^{+}$[16] के ग्रम्लीय जल-ग्रपघटन में बताया गया है।

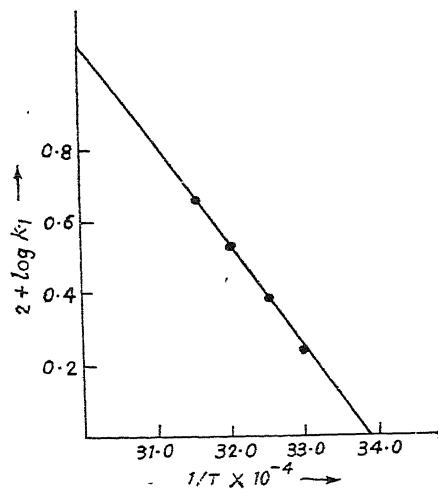
7. ताप का अभिक्रिया वेग पर प्रभाव

सारणी 7

$[Cr\ (VI)]=2{\cdot}0\times10^{-3}$ M

$[C_2O_4^{--}]=40{\cdot}0\times10^{-3}$ M

$[H^+]=0{\cdot}18$ M

$\mu=0{\cdot}50$ M

चित्र 4

ताप °′C	ताप °′A	$1/T\times10^{-4}$	$k_1\times10^3$ प्रति मिनट	$K_1\times10^2$	$2+\log K_1$
30	303	33·01	16·4	1.70	0 2304
35	308	32·47	23.0	2.39	0·3784
40	313	31·96	32·2	3.35	0·5250
45	318	31·44	41·4	4.31	0·6345

अभिक्रिया का ग्रध्ययन 30 से 45° के मध्य विभिन्न तापों पर किया गया। विशिष्ट वेग नियतांक का मान, प्रेक्षित प्रथम कोटि वेग नियतांक से निम्न समीकरण द्वारा परिकलित किया गया :

$$K_1=k_1/60\ [C_2O_4^{--}]^2$$

निरक्षेप ताप के व्युत्क्रम के विरुद्ध लाग विशिष्ट वेग नियतांक $\log K_1$ के आरेख में सरल रेखा प्राप्त होती है (चित्र 4)। रेखा के ढाल से परिकलित सक्रिय ऊर्जा 13·22 किकै० प्रति ग्राम ग्रणु प्राप्त होती है। ग्रावृति गुणक pZ तथा $\triangle S$ के मान क्रमशः $5{\cdot}008\times10^{-7}$ mole^{-2} litre^{+2} sec^{-1} तथा -24 e. u. प्राप्त होते हैं।

क्रोमिक अम्ल द्वारा ग्रॉक्सैलेट ग्रायन का उपचयन, मरक्युरिक क्लोराइड का ग्रपचयन प्रेरित करने में ग्रसफल रहता है। इससे विदित होता है कि ग्रभिक्रिया के मध्य HC_2O_4, $C_2O_4^-$ य CO_2^-

के समान मूलक अथवा मूलक आयन नहीं बनते हैं। इसमें यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि Cr(VI) दो इलेक्ट्रॉन उपचायक की तरह कार्य करता है, जिसकी पुष्टि क्षारकों के उत्प्रेरण अध्ययन से भी होती है। अम्ल की उच्च सांद्रता से अप्रभावित रहना यह दर्शाता है कि वेग-निर्धारण पद में आक्सैलिक अम्ल-अणु भाग लेता है, आक्सैलेट आयन नहीं।

प्रेक्षणों से ज्ञात होता है कि Mn (II) अभिक्रिया का वेग उत्प्रेरित करता है। आक्सैलिक अम्ल का परमैंगनेट द्वारा उपचयन[14-19] तथा सीरिक सल्फेट द्वारा थैलस सल्फेट का उपचयन[20], Mn(II) आयनों द्वारा उत्प्रेरित होता है। प्रस्तावित क्रिया विधि के अनुसार, पहले Mn (II) उपचायक क्रिया करके Mn(III) तथा Mn(IV) बनाता है। ये उच्च संयोजी आयन, अच्छे उपचायक होने के कारण, अपचायक को उपचित कर देते हैं। अत: Mn(II) की उपस्थिति में अभिक्रिया में Cr(VI) का विलोप हो जाता है। इस प्रकार अभिक्रया का वेग बढ़ जाता है। Mn(II) की उच्च सांद्रता में, अभिक्रिया क्रोमिक अम्ल की सांद्रता से अप्रभावित रहती है। संभवत: Mn (III) या Mn (IV) आक्सैलिक अम्ल के साथ संकुल बनाते हैं तथा इन संकुलों का विघटन वेग निर्धारक पद होना चाहिये।

अनुत्प्रेरित अभिक्रिया की सक्रियण ऊर्जा 13 किकै० प्राप्त होती है जो आक्सैलिक अम्ल में C-C बंध के विखंडन के लिये आवश्यक ऊर्जा से लगभग 35 से 55 किकै० कम है[21]। सक्रियण उर्जा में इस कमी का कारण उप-सहसंयोजकता होना चाहिये तथा उप-सहसंयोजकता की अनुपस्थिति में सक्रियण ऊर्जा का मान कहीं बहुत अधिक होना चाहिये।

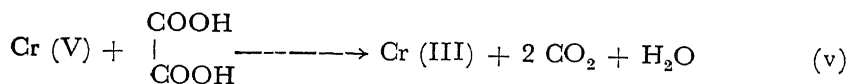
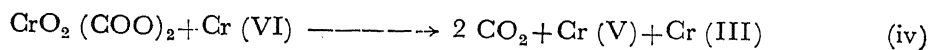
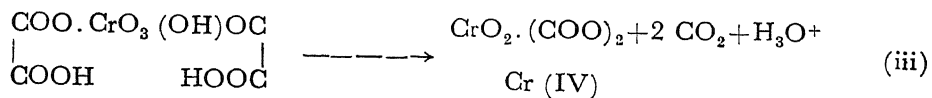
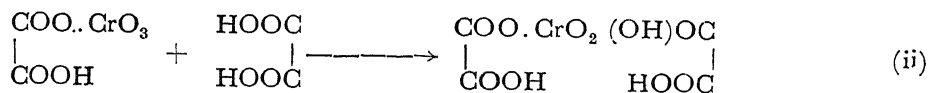
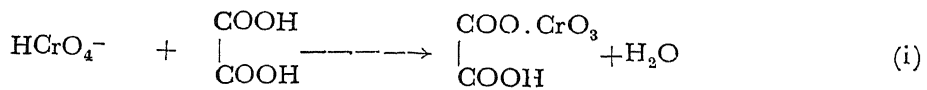
उपर्युक्त अध्ययनों के प्रकाश में विवेचित अभिक्रिया के लिये निम्नलिखित क्रियाविधि प्रस्तावित की जा सकती है:

$$HCrO_4^- + \begin{matrix} COOH \\ | \\ COOH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} COO.CrO_3 \\ | \\ COOH \end{matrix} + H_2O \qquad (i)$$

$$\begin{matrix} COO..CrO_3 \\ | \\ COOH \end{matrix} + \begin{matrix} HOOC \\ | \\ HOOC \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} COO.CrO_2\,(OH)OC \\ | \qquad\qquad | \\ COOH \qquad HOOC \end{matrix} \qquad (ii)$$

$$\begin{matrix} COO.CrO_3\,(OH)OC \\ | \qquad\qquad | \\ COOH \qquad HOOC \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} CrO_2.(COO)_2 + 2\,CO_2 + H_3O^+ \\ Cr\,(IV) \end{matrix} \qquad (iii)$$

$$CrO_2\,(COO)_2 + Cr\,(VI) \longrightarrow 2\,CO_2 + Cr\,(V) + Cr\,(III) \qquad (iv)$$

$$Cr\,(V) + \begin{matrix} COOH \\ | \\ COOH \end{matrix} \longrightarrow Cr\,(III) + 2\,CO_2 + H_2O \qquad (v)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत कार्य में आर्थिक सहायता देने के लिये लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का और सम्पूर्ण कार्य में मार्गदर्शन एवं उत्साह वर्धन के लिये डा० एस० एन० कवीश्वर प्राचार्य विज्ञान महाविद्यालय, के आभारी हैं।

निर्देश

1. फ्रिजिथ, आर० ओ० तथा मेकोन, ए०, **ट्रांजै० फेराडे सोसा०**, 1932, **28**, 518
2. फ्रिजिथ, आर० ओ०, तथा मेकोन, ए०, **ट्रांस० फेराडे सोसा०**, 1932, **28**, 107
3. मेकोवर, वी० तथा लिवहेफकी, एच० ए०, **ट्रांस० फेराडे सोसा०**, 1933, **29**, 597
4. फ्रिजिथ, आर० ओ० तथा मेकोन, ए०, **ट्रांस० फेराडे सोसा०**, 1932, **28**, 752
5. जोन्स, जे० आर० तथा वाटर्स, डब्लू० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1961, 4757
6. भार्गव, एन० सी०, रमाशंकर तथा बाकोरे, बी० वी०, Sonderdruck aus Zeitschr, fur physikalische chemie 1965, 229, 238-244
7. चक्रवर्ती और घोष, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1957, **34**, 841
8. कुरूपिका और कैंडलाक Collection Czech. Chem. Communs., 1959, **24**, 1783-90
9. ज्ञानी और सुखनन्दन प्रसाद, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1964, **41(2)**, 155-9
10. धर, एन० आर०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1917, **111**, 707
11. जोब्लेजेंस्की, **जेड० एनआर्ग० केमि०**, 1908, **68**, 38
12. वेगनर, **जेड० एनआर्ग० केमि०**, 1928, **168**, 279
13. वाइवर्ज और मिल, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1958, **80**, 3022
14. वेस्थीमर, एफ० एच०, **केमि० रिव्यूज**, 1949, **45**, 419
15. राधाकृष्ण मूर्ति, पी० एस० और बेहरा, टी० सी० एच०, **इंडि० जर्न० आफ केमिस्ट्री**, 1971, **9**, 41
16. फ्रेड बसालो और राल्फ, पिअर्सन जी०, Mechanism of Inorganic Reactions. **जान विले एण्ड सन्स न्यूयार्क** 1958, 120

17. लानेर, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1932, **54**, 2597

18. लानेर और योस्ट, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1934, **56**, 2571

19. फेसेनडेन और रेडमान, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1935, **57**, 2246

20. सेफर, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1933, **55**, 2169

21. फ्रेडरिक, आर० डियूक, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1947, **69**, 2885

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October 1974, Pages 271-280

एक सार्वीकृत समाकल परिवर्त-III

एस० पी० गोयल
गणित विभाग, वनस्थली विद्यापीठ, राजस्थान

[प्राप्त—जुलाई 1, 1974]

सारांश

दो G-फलनों के गुणनफल की अष्टि वाले समाकल परिवर्त के लिए एक अद्वितीयता प्रमेय की स्थापना की गई है। इसके पश्चात् इस परिवर्त के लिये कई प्रमेय बताये गये हैं।

Abstract

Study of generalized integral transform-III. *By* S. P. Goyal, Department of Mathematics, Banasthali Vidyapith, Banasthali Rajasthan.

In this paper, we first establish the uniqueness theorem for an integral transform, whose kernel is the product of two G-functions studied recently by the author[2]. Later on, we state certain theorems for this transform. Lastly, we prove a new and interesting theorem, showing interconnection between the images and originals of related function under this transform. It is expected that the present study will extend and unify a number of recent results obtained by various authors on integral transforms.

1. परिचय :

हाल ही में हमने[2] एक समाकल परिवर्त का अध्ययन किया है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है :

$$\phi(s, t)=s\left[f(x, y); \begin{matrix} m, n \\ p, q \end{matrix} : \begin{matrix} k, f \\ r, l \end{matrix} ; \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} ; \begin{matrix} (c_r) \\ (d_l) \end{matrix} ; s, t\right]$$

$$=st\int_0^\infty\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right] G_{r,l}^{k,f}\left[ty\middle|\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix}\right] f(x, y)\, dx\, dy \qquad \ldots \quad (1\cdot1)$$

(1·1) द्वारा परिभाषित परिवर्त अत्यन्त सामान्य प्रकृति का है क्योंकि परिवर्त की अष्टि दो G-फलनों [10, p. 143, (1)] का गुणनफल है। हम x तथा y के लघु तथा वृहद मानों के लिये क्रमश:

$$f(x, y) = O(x^u y^v)$$
$$= O(x^g y^h e^{-ax-by}),$$

प्रयुक्त करेंगे। इसके अतिरिक्त यह भी मान लिया गया है कि निम्नांकित प्रतिबन्धों में से एक प्रतिबन्ध की तुष्टि होती है : (i) $Re(a)>0$, $Re(b)>0$; m, n, p, q, k, f, r तथा l ऐसे पूर्णांक हैं कि $1 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant \leqslant 1$, $0 \leqslant f \leqslant r$; $2(m+n) \geqslant (p+q)$, $2(k+f) \geqslant (r+1)$; $|\arg s| \leqslant \left(m+n-\frac{p+q}{2}\right)\pi$, $|\arg t| \leqslant \left(k+f-\frac{r+1}{2}\right)\pi$; $Re(1+u+b_j)>0 (j=1, \ldots, m)$ and $Re(1+v+d_j) > 0 (j=1, \ldots, k)$.

(ii) $Re(a)=Re(b)=0$; $n=f=0$; m, p, q, k, r तथा l पूर्णांक हैं जिनसे $1 \leqslant m \leqslant q$, $1 \leqslant k \leqslant l$, $r \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $p \leqslant q-2$, $r \leqslant 1-2$ की तुष्टि होती है ; $2m=p+q$, $2k=r+1$, s तथा t सत्य हैं : $Re(1+u+b_j)>0 (j=1, \ldots, m)$, $Re(1+v+d_j)>0 (j=1, \ldots, k)$,

$$Re\left[\sum_1^p (a_j) - \sum_1^q (b_j)\right] + \tfrac{1}{2}(q-p+1) > (q-p)\, Re(g+1) \text{ तथा}$$

$$Re\left[\sum_1^r (c_j) - \sum_1^l (d_j)\right] + \tfrac{1}{2}(l-r+l) > (l-r)\, Re(h+1).$$

(iii) $Re(a)=Re(b)=0$; m, p, q, k, r तथा l पूर्णांक हैं जिनसे $1 \leqslant m \leqslant q$, $1 \leqslant k \leqslant l$, $p \geqslant 0$, $r \geqslant 0$; $n=f=0$; $2m>(p+q)$, $2k>(r+1)$, $|\arg s| < \left(m-\frac{p+q}{2}\right)\pi$, $|\arg t| < \left(k-\frac{r+1}{2}\right)\pi$; $Re(1+u+b_j)>0 (j=1, \ldots, m)$ तथा $Re(1+v+d_j)>0 (j=1, \ldots, k)$ की तुष्टि होती है।

यद्यपि (1·1) द्वारा परिभाषित समाकल परिवर्त जायसवाल[7] के परिवर्त की एक विशिष्ट दशा है किन्तु जायसवाल ने केवल एक प्रकार के प्रतिबन्धों (वैधता) का अध्ययन किया।

प्रयुक्त संकेत

प्रस्तुत शोधपत्र में निम्नांकित सकेतों का प्रयोग किया है :

(i) $(a_1+\sigma), \ldots, (a_p, \sigma)$ के लिये $(a_1, \sigma)_{1, p}$

(ii) $(a_{n+1}, \sigma), \ldots, (a_p, \sigma)$ के लिये $(a_i, \sigma)_{n+1, p}$

(iii) $(-a_1-\rho, \sigma), \ldots, (-a_p-\rho, \sigma)$ के लिये $(-a_i-\rho, \sigma)_{1, p}$

(iv) $a_1, \ldots, a_p$ के लिये (a_p)

(v) $1-\rho-a_1, \ldots, 1-\rho-a_p$ के लिये $(1-\rho-a_p)$

(vi) $1-\rho-a_{n+1}, \ldots, 1-\rho-a_p$ के लिये $(1-\rho-a_i)_{n+1,\, p}$

(vii) $\frac{\alpha}{m}, \frac{\alpha+1}{m}, \ldots, \frac{\alpha+m-1}{m}$ के लिये $\triangle(m, \alpha)$

उपर्युक्त समस्त संकेतों में $\sigma>0$ तथा m घन पूर्णांक है।

2. इस अनुभाग में हम अद्वितीयता प्रमेय (Uniqueness theorem) को (1·1) द्वारा परिभाषित प्रमेय के लिये सिद्ध करेंगे। इसे सिद्ध करने के पूर्व निम्नांकित प्रमेयिका सिद्ध की जावेगी,

प्रमेयिका : यदि

$$G_{p,q}^{m,n}\left[sx\left|{(a_p) \atop (b_q)}\right.\right] G_{r,1}^{k,f}\left[ty\left|{(c_r) \atop (d_l)}\right.\right] f(x,y)\, dx\, dy=0 \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

तो

$$f(x,y)\equiv 0 \quad \ldots \quad (2\cdot2)$$

बशर्ते (i) $f(x,y)$ $x>0, y>0$ के लिये संतत फलन है (ii) (1·1) द्वारा परिभाषित $|f(x,y)|$ का समाकल परिवर्त विद्यमान है तथा (iii) $Re(b_i-b_j+1)>0(i=1, \ldots, m;\ j=m+1, \ldots, q)$, $Re(d_i-d_j+1)>0\ (i=1, \ldots, k; j=k+1, \ldots, 1)$, $Re(a_i-a_j+1)<0(i=1, \ldots, n;\ j=n+1, \ldots, p)$, $Re(c_i-c_j+1)<0(i=1, \ldots, f;\ \ j=f+1, \ldots, r)$ $Re(1+b_i)>0\ (i=1, \ldots, m)$ तथा $Re(1+d_i)>0(i=1, \ldots, k)$.

उपपत्ति :

(2·1) को

$$G_{p,\,q+1}^{q-m+1,\ p-n}\left[\frac{a}{s}\left|{(-a_i)_{n+1,p}, (-a_n) \atop 0,\ (-b_i)_{m+1,q},\ (-b_m)}\right.\right] G_{r,l+1}^{1-k+1,r-f}\left[\frac{b}{t}\left|{(-c_i)_{f+1,r},\ (-c_f) \atop 0,\ (-d_i)_{k+1,t},\ -d_k)}\right.\right]$$

से गुणा करने पर, जहाँ

$$(p+q+1)>2(m+n),\ (r+l+1)>2(f+k),\ |\arg a|<\left(\frac{p+q+1}{2}-m-n\right)\pi,\ |\arg b|<\left(\frac{r+l+1}{2}-f-k\right)\pi.$$

तथा इसे 0 से ∞ के मध्य s तथा t के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty\int_0^\infty G_{p,q+1}^{q-m+1,p-n}\left[\frac{a}{s}\left|{(-a_i)_{n+1,p},\ (-a_n) \atop 0,\ (-b_i)_{m+1,q},\ (-b_m)}\right.\right] G_{r,l+1}^{1-k+1,r-f}\left[\frac{b}{t}\left|{(-c_i)_{f+1,r},\ (-c_f) \atop 0, (-d_i)_{k+1,l}, (-d_k)}\right.\right]$$

$$\times\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx\left|{(a_p) \atop (b_q)}\right.\right] G_{r,l}^{k,f}\left[ty\left|{(c_r) \atop (d_l)}\right.\right] f(x,y)\, dx\, dy\right\} ds\, dt=0$$

अब (2·3) में समाकलन के क्रम को उलटने से जो निर्दिष्ट प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty G_{p,q+1}^{q-m+1,p-n}\left[\frac{a}{s}\middle|\begin{matrix}(-a_i)_{n+1,p}, (-a_n)\\(0, (-b_i)_{m+1,q}, (-b_m))\end{matrix}\right] G_{p,q}^{m,n}\left[sx\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left.\times G_{r,l+1}^{l-k+1,r-f}\left[\frac{b}{t}\middle|\begin{matrix}(-c_i)_{f+1,r}, (-c_f)\\0, (-d_i)_{k+1,l}, (-d_k)\end{matrix}\right] G_{r,l}^{k,f}\left[ty\middle|\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix}\right] ds\, dt\right\} dx\, dy=0 \quad . \quad . \quad (2·4)$$

अब ज्ञात फल [10, p. 159 (1)] की सहायता से s तथा t समाकलों (ये एक दूसरे से स्वतन्त्र हैं) का मान निकालने पर तथा इस प्रकार से प्राप्त व्यंजक को एक अन्य विख्यात सूत्र [10, p. 150 (2)] की सहायता से सरल करने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{-1} y^{-1} G_{0,1}^{1,0}\left[\frac{a}{s}\middle|\begin{matrix}\cdots\\0\end{matrix}\right] G_{0,1}^{1,0}\left[\frac{b}{t}\middle|\begin{matrix}\cdots\\0\end{matrix}\right] f(xy)\, dx, \, y=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2·5)$$

पुन: (2·5) में निम्नांकित फलन का प्रयोग करने पर

$G_{0,1}^{1,0}\left[x\middle|\begin{matrix}\cdots\\0\end{matrix}\right]=e^{-x}$ तथा इस प्रकार से प्राप्त चरों को बदलने पर हमें

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{-1} y^{-1} e^{-ax-by} f(x^{-1}, y^{-1})\, dx\, dy=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2·6)$$

प्राप्त होगा। समीकरण (2·6) में

$$\int_0^\infty x^{-1} e^{-ax} f(x^{-1}, y^{-1})\, dx=g(y) \quad . \quad . \quad . \quad (2·7)$$

रखने पर

$$\int_0^\infty y^{-1} e^{-by} g(y)\, dy=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2·8)$$

प्राप्त होगा।

अब चूंकि (2·7) में सन्निहित समाकल $y>0$ में शतत अभिसारी है अत: $g(y)$ $y>0$, में एक शतत फलन है। इस प्रकार (2·8) में लर्च के प्रमेय [9, p. 339] का प्रयोग करने पर हमें (2·9) प्राप्त होता है,

$$g(y)=\int_0^\infty x^{-1} e^{-ax} f(x^{-1}, y^{-1})\, dx\equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2·9)$$

पुनश्च, चूँकि $f(x^{-1}, y^{-1})$ $x>0, y>0$, में शतत फलन है अत: (2·9) में फिर से लर्च प्रमेय व्यवहृत करने पर

$$f(x^{-1}, y^{-1})\equiv 0.$$

अत:

$$f(x, y)\equiv 0.$$

इस प्रकार प्रमेयिका स्थापित हो जाती है।

अद्वितीयता प्रमेय

यदि $f_1(x, y)$ तथा $f_2(x, y)$ संतत फलन हों $x>0$, $y>0$ तथा

$$\int_0^\infty\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right] G_{r,l}^{k,f}\left[ty\left|\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix}\right.\right] f_1(x, y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right] G_{r,l}^{k,f}\left[ty\left|\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix}\right.\right] f_2(x, y)\,dx\,dy \quad \ldots \quad (2\cdot10)$$

तो $$f_1(x, y)\equiv f_2(x, y) \quad \ldots \quad (2\cdot11)$$

बशर्ते (1·1) में परिभाषित $|f_1(x, y)|$ तथा $|f_2(x, y)|$ के परिवर्त विद्यमान हों ।

अद्वितीयता प्रमेय की उपपत्ति उपर्युक्त प्रमेयिका का प्रत्यक्ष प्रतिफल है ।

3. इस अनुभाग में (1·1) द्वारा परिभाषित समाकल परिवर्त के लिये तीन प्रमेयों का उल्लेख किया जावेगा । इन प्रमेयों की उपपत्तियाँ परिवर्त की परिभाषा से सीधे प्राप्त हो जाती हैं।

प्रमेय 1

यदि $$\phi(s, t)=s\left[f(x, y)\,;\begin{matrix}m,\,n\\p,\,q\end{matrix}:\begin{matrix}k,f\\r,\,l\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix};\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix};s,\,t\right]$$

तो $$\phi\left(\frac{s}{c},\frac{t}{d}\right)=s\left[f(cx, dy)\,;\begin{matrix}m,\,n\\p,\,q\end{matrix}:\begin{matrix}k,f\\r,\,l\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}:\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix};s,\,t\right] \quad \ldots \quad (3\cdot1)$$

प्रमेय 2

यदि $$\phi(s, t)=s\left[f(x, y);\begin{matrix}m,\,n\\p,\,q\end{matrix};\begin{matrix}k,f\\r,\,l\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}:\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix};s,\,t\right]$$

तथा $$f(x, y)=f_1(x)\,f_2(y)$$

तो $$\phi(s, t)=\phi_1(s)\phi_2(t) \quad \ldots \quad (3\cdot2)$$

जहाँ $$\phi_1(s)=s\left[f_1(x)\,;\begin{matrix}m,\,n\\p,\,q\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix};s\right]=s\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right]f_1(x)\,dx$$

$$\phi_2(t)=s\left[f_2(y)\,;\begin{matrix}k,f\\r,\,l\end{matrix};\begin{matrix}(c_r)\\(d_1)\end{matrix};t\right]=t\int_0^\infty G_{r,l}^{k,f}\left[ty\left|\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix}\right.\right]f_2(y)\,dy$$

प्रमेय 3

यदि $$\phi_i(s, t)=s\left[f_i(x, y);\begin{matrix}m,\,n\\p,\,q\end{matrix}:\begin{matrix}k,f\\r,\,l\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}:\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix};s,\,t\right]\ (i=1,2)$$

तो $$\int_0^\infty\int_0^\infty \phi_1(u, v)\,f_2(u, v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}=\int_0^\infty\int_0^\infty \phi_2(u, v)\,f_1(u, v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}$$

बशर्ते (3·3) में सन्निहित समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी हों।

4. अब हम एक प्रमेय स्थापित करेंगे जिसमें (1·1) द्वारा परिभाषित समाकल परिवर्त के अन्तर्गत प्रतिबिम्बों और मूलों के मध्य के अन्त:सम्बन्ध दर्शाया गया है।

प्रमेय : यदि

$$\phi(s,t)=s\left[x^{-1/\rho(\rho+a-b)}\,y^{-1/\sigma(\sigma+c-d)}f(x,y)\,;\,\begin{matrix}m,n\\p,q\end{matrix}:\begin{matrix}k,f\\r,l\end{matrix};\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}:\begin{matrix}(c_r)\\(d_l)\end{matrix};s,t\right] \quad \ldots \quad (4\cdot1)$$

तथा
$$g(s,t)=s\left[x^a y^c f(x^{-\rho},y^{-\sigma})\,;\,\begin{matrix}M,N\\P,Q\end{matrix}:\begin{matrix}K,F\\R,L\end{matrix};\begin{matrix}(e_P)\\(f_Q)\end{matrix}:\begin{matrix}(g_R)\\(h_L)\end{matrix};s,t\right] \quad \ldots \quad (4\cdot2)$$

तो
$$\phi(s,t)=st\rho\sigma\int_0^\infty\int_0^\infty x^{b-1}y^{d-1}g(x,y)\;H^{Q-M+m,\;P-N+n}_{P+p,\;Q+q}\left[sx\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.\right]$$
$$\times H^{L-K+k,R-F+f}_{R+r,L+1}\left[ty\left|\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right.\right]dx\,dy \quad \ldots \quad (4\cdot3)$$

जहाँ (i) A $(a_1, 1)_{(1,n)}$, $(-e_i-b,\rho)_{1,p}$, $(a_i,1)_{n+1,p}$ के लिये

(ii) B $(b_i,1)_{1,m}$, $(-f_i-b,\rho)_{1,Q}$, $(b_i,1)_{m+1,q}$ के लिये

(iii) C $(c_i,1)_{1,f}$, $(-g_i-d,\sigma)_{1,R}$, $(c_i,1)_{f+1,r}$ के लिये

(iv) D $(d_i,1)_{1,k}$, $(-h_i-d,\sigma)_{1,L}$, $(d_i,1)_{k+1,1}$ के लिये आये हैं।

यदि निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि हो तो प्रमेय वैध है :

(i) (1·1) द्वारा परिभाषित $|x^a y^c f(x^{-\rho},y^{-\sigma})|$ का समाकल परिवर्त विद्यमान है

(ii) $(2m+2n-p-q>\rho(2M+2N-P-Q)>0$, $(2k+2f-r-1)>\sigma(2K+2F-R-L)>0$, $|\arg s|<\left(m+n-\frac{p+q}{2}\right)\pi$, $|\arg t|<\left(k+f-\frac{r+1}{2}\right)\pi$;

(iii) $\rho>0$, $\sigma>0$, $Re(b+\rho b_i+f_j+1)>0$ $(i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,M)$, $Re(f_i-f_j+1)>0$ $(i=1,\ldots,M;\ j=M+1,\ldots,Q)$, $Re(b+\rho(a_i-1)+e_j)<0$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,N)$, $Re(e_i-e_j-1)<0$ $(i=1,\ldots,N;\ j=N+1,\ldots,P)$, $Re(d+\sigma d_i+h_j+1)>0$ $(i=1,\ldots,k;j=1,\ldots,K)$, $Re(h_i-h_j+1)>0$ $(i=1,\ldots,K;\ j=K+1,\ldots,L)$, $Re(d+\sigma(c_i-1)+g_j+1)<0$ $(i=1,\ldots,f;j=1,\ldots,F)$; तथा $Re(g_i-g_j-1)<0$ $(i=1,\ldots,F;\ j=F+1,\ldots,R)$.

उपपत्ति : समीकरण (1·1) तथा ज्ञात फलों से हमें

$$s^{-b}\,t^{-d}\;G^{m,n}_{p,q}\left[zs^{-\rho}\Big|^{(a_p)}_{(b_q)}\right]\;G^{k,f}_{r,l}\left[ut^{-\sigma}\Big|^{(c_r)}_{(d_l)}\right]$$

$$=s\Big[\;x^b\,y^d\;H^{Q-M+m,P-N+n}_{P+p,Q+q}\left[zx^{\rho}\Big|^{A}_{B}\right]\;H^{L-K+k,R-F+f}_{R+r,L+l}$$

$$\left[uy^{\sigma}\Big|^{C}_{D}\right];\begin{matrix}M,N\\P,Q\end{matrix}:\begin{matrix}K,F\\R,L\end{matrix};\begin{matrix}(e_P)\\(f_Q)\end{matrix}:\begin{matrix}(g_R)\\(h_L)\end{matrix};s,t\Big]\quad\ldots\quad(4\cdot4)$$

प्राप्त है बशर्ते $\quad |\arg z|<\left[m+n-\frac{p+q}{2}-\rho\left(M+N-\frac{P+Q}{2}\right)\right]\pi,$

$|\arg u|<\left[k+f-\frac{r+1}{2}-\sigma\left(K+F-\frac{R+L}{2}\right)\right]\pi$ तथा प्रतिबन्ध (ii) तथा (iii) की तुष्टि होती हो।

(4·2) तथा (4·4) युग्मों में प्रमेय 3 को व्यवहृत करने पर :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{b-1}y^{d-1}g(x,y)\;H^{Q-M+m,P-N+n}_{P+p,Q+q}\left[zx^{\rho}\Big|^{A}_{B}\right]H^{L-K+k,R-F+f}_{R+r,L+l}\left[uy^{\sigma}\Big|^{C}_{D}\right]dx\,dy,$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{a-b-1}y^{c-d-1}f(x^{-\rho},y^{-\sigma})\;G^{m,n}_{p,q}\left[zx^{-\rho}\Big|^{(a_p)}_{(b_q)}\right]G^{k,f}_{r,l}\left[uy^{-\sigma}\Big|^{(c_r)}_{(d_l)}\right]dx\,dy\qquad(4\cdot5)$$

(4·5) में z को s द्वारा और u को t द्वारा स्थानान्तरित करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् प्रमेय प्राप्त होती है।

अब (1·1) द्वारा परिभाषित परिवर्त के लिये प्रमेय 3 के सम्प्रयोग की वैधता सिद्ध करना शेष रह जाता है। यह सम्प्रयोग वैध है यदि $|x^a y^c f(x^{-\rho},y^{-\sigma})|$ का परिवर्त जो (1·1) द्वारा परिभाषित है, अवस्थित हो, (4·4) में दिये हुये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों और (4·5) में दिये हुये द्विगुण समाकलों में से एक पूर्णतया अभिसारी हो। चूँकि ये समस्त प्रतिबन्ध प्रमेय के साथ सम्मिलित हैं अतः इसकी उपपत्ति पूर्ण हुई।

(4·3) द्वारा दिये गये प्रमेय की विशिष्ट दशायें

(i) उपर्युक्त प्रमेय में $n=f=N=F=0, p=m, r=k, P=M, R=K,$ रख कर, q तथा u को $m+1$, l तथा k को $k+1$, Q तथा M को $M+1$, L तथा K को $K+1$ से प्रतिस्थापित करते हैं और प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन करके प्रमेय में से प्राप्य प्रतिबन्धों के अन्तर्गत निम्नांकित प्रमेय प्राप्त करते हैं।

उपप्रमेय 1 :

यदि $\phi(s,t)=G\Big[\;x^{-1/\rho(\rho+a+b)}\,y^{-1/\sigma(\sigma+c-d)}\,f(x,y);$

$$\begin{matrix}m+1,0\\m,m+1\end{matrix}:\begin{matrix}k+1,0\\k,k+1\end{matrix};\begin{matrix}(a_m+b_m)\\(b_m),\mu\end{matrix}:\begin{matrix}(c_k+d_k)\\(d_k),\nu\end{matrix};s,t\Big]$$

तथा $g(s, t)=G\left[x^a y^c f(x^{-\rho}, y^{-\sigma})\,;\begin{matrix}M+1,\,0\\ M,\,M+1\end{matrix}:\begin{matrix}K+1,\,0\\ K,\,K+1\end{matrix};\begin{matrix}(e_M+f_M)\\ (f_M),\,\lambda\end{matrix}:\begin{matrix}(g_K+h_K)\\ (h_K),\,\delta\end{matrix};s,\,t\right]$

तो $$\phi(s, t)=st\rho\sigma\int_0^\infty\int_0^\infty x^{b-1}y^{d-1}g(x, y)\;H^{m+1,M}_{M+m,M+m+2}\left[sx^\rho\middle|\begin{matrix}A'\\ B'\end{matrix}\right]H^{k+1,K}_{K+k,K+k+2}\left[ty^\sigma\middle|\begin{matrix}C'\\ D'\end{matrix}\right]dx\,dy \quad \ldots \quad (4\cdot6)$$

जहाँ (i) $A'(-e_i-f_i-b,\,\rho)_{1,M},\,(a_i+b_i,\,1)_{1,m}$ के लिये

(ii) $B'(b_i,\,1)_{1,m},\,(\mu,\,1),\,(-f_i-b,\,\rho)_{1,M},(-\lambda-b,\,\rho)$ के लिये

(iii) $C'(-g_i-h_i-d,\,\sigma)_{1,K},\,(c_i+d_i,\,1)_{1,k}$ के लिये

(iv) $D'(d_i,\,1)_{1,k},\,(\nu,\,1),\,(-h_i-d,\,\sigma)_{1,K},\,(-\delta-d,\,\sigma)$ के लिये

आया है तथा $G\left[f(x, y);\begin{matrix}m+1,\,0\\ m,\,m+1\end{matrix}:\begin{matrix}n+1,\,0\\ n,\,n+1\end{matrix};\begin{matrix}(a_m+b_m)\\ (b_m),\,\mu\end{matrix};\begin{matrix}(c_n+d_n)\\ (d_n),\,\nu\end{matrix};s,\,t\right]$

$$=st\int_0^\infty\int_0^\infty G^{m+1,0}_{m,m+1}\left[sx\middle|\begin{matrix}(a_m+b_m)\\ (b_m),\,\mu\end{matrix}\right]G^{n+1,0}_{n,n+1}\left[ty\middle|\begin{matrix}(c_n+d_n)\\ (d_n),\,\nu\end{matrix}\right]f(x,y)\,dx\,dy$$

दो चरों वाला माइजर-लैपलास परिवर्त है जिसका अध्ययन जैन [5, p. 366] ने किया है।

(ii) पुनः यदि उपप्रमेय 1 में हम $m=k=M=K=1,\ a_1=-1-r,\ b_1=r-u,\ \mu=-r-u$ $c_1=l_1-r_1,\ d_1=r_1-u_1,\ \nu=-r_1-u_1;\ e_1=-L-R,\ f_1=R-v,\ \lambda=-R-v;\ g_1=-L_1-R_1,$ $h_1=R_1-v_1,\ \delta=-R_1-v_1$ रखें तथा इसमें ज्ञात फल [1, p. 221, (68)] का उपयोग करें तो मुख्य प्रमेय में प्राप्य प्रतिबन्धों के अन्तर्गत निम्नांकित प्रमेय प्राप्त होगा।

उपप्रमेय 2 :

यदि $\phi(s, t)=W\left[x^{-1/\rho(\rho+a-b)}y^{-1/\sigma(\sigma+c-d)}f(x, y);\begin{matrix}u+\frac{1}{2};\,l+\frac{1}{2},r\\ u_1+\frac{1}{2};\,l_1+\frac{1}{2},\,r_1\end{matrix};s,\,t\right]$

तथा $g(s, t)=W\left[x^a y^c f(x^{-\rho}, y^{-\sigma}):\begin{matrix}v+\frac{1}{2};\,L+\frac{1}{2},\,R\\ v_1+\frac{1}{2};\,L_1+\frac{1}{2},\,R_1\end{matrix};s,\,t\right]$

तो $$\phi(s, t)=st\,\rho\sigma\int_0^\infty\int_0^\infty x^{b-1}y^{d-1}g(x, y)\;H^{2,1}_{2,4}\left[sx^\rho\middle|\begin{matrix}(L+v-b,\,\rho),(-1-u,\,1)\\ (\pm r-u,\,1),(v\pm R-b,\,\rho)\end{matrix}\right]\times H^{2,1}_{2,4}\left[ty^\sigma\middle|\begin{matrix}(L_1+v_1-d,\,\sigma),(-l_1-u_1,\,1)\\ (\pm r-u_1,\,1),(v_1\pm R_1-d,\,\sigma)\end{matrix}\right]dx\,dy \quad \ldots \quad (4\cdot7)$$

जहाँ (i) $(a+b,\,\sigma)$ का प्रयोग $(a+b,\,\sigma),\,(a-b,\,\sigma)$ प्राचलों को बताने के लिये हुआ है तथा

(ii) $W\left[f(x,y)\,;\begin{matrix}u+\frac{1}{2};\,l+\frac{1}{2},\,r\\ u_1+\frac{1}{2};\,l_1+\frac{1}{2},r_1\end{matrix};s,\,t\right]$

$$= st \int_0^\infty \int_0^\infty (sx)^{-u+1/2} (ty)^{-u_1+1/2} e^{-1/2(sx+ty)} W_{l+1/2, r}(sx) W_{l_1+1/2}(ty) f(x, y)\, dx\, dy$$

दो चरों वाला सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त है जिसका अध्ययन निगम [12, p. 331] ने किया है।

(iii) पुनश्च यदि हम उपप्रमेय 2 में $u=l=-r$, $u_1=l_1=-r_1$; $v=L=-R$; $v_1=L_1=-R_1$ रखें तो हमें [4, p. 601] के वलपर निम्नांकित रोचक फल प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 3 :

यदि $\phi(s, t) = L\left[x^{-1/\rho(\rho+a-b)} y^{-1/\sigma(\sigma+c-d)} f(x, y); s, t \right]$

तथा $g(s, t) = L[x^a y^c f(x^{-\rho}, y^{-\rho}); s, t]$

तो $$\phi(s, t) = st\rho\sigma \int_0^\infty \int_0^\infty x^{b-1} y^{d-1} \mathcal{J}_b^{\rho}(sx^\rho) \mathcal{J}_d^{\sigma}(ty^\sigma)\, g(x, y)\, dx\, dy \qquad (4{\cdot}8)$$

जहाँ (i) $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\nu}(x)$ मैटीलैंड का सार्वीकृत बेसिल फलन [13, p. 257] है।

तथा (ii) $L[f(x, y); s, t] = st \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(sx+ty)} f(x, y)\, dx\, dy$

दो चरों का विख्यात लैपलास परिवर्त है।

(iv) $f(x, y)$ को y से स्वतन्त्र फलन के रूप में मानने पर, माना कि $f(x), f=r=F=R=0$, $k=l=K=L=l$, $d_1=h_1=0$, $c=0$, $d=\sigma=1$, हमें थोड़े से सरलीकरण के बाद निम्नांकित प्रमेय प्राप्त होगी।

उपप्रमेय 4 :

यदि $$\phi(s) = S\left[x^{-1/\rho(\rho+a-b)} f(x); \begin{matrix} m, n \\ p, q \end{matrix}; \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix}; s \right]$$

तथा $$g(s) = S\left[x^a f(x^{-\rho}); \begin{matrix} M, N \\ P, Q \end{matrix}; \begin{matrix} (e_P) \\ (f_Q) \end{matrix}; s \right]$$

तो $$\phi(s) = s\rho \int_0^\infty x^{b-1} g(x) H_{P+p, Q+q}^{Q-M+m, P-N+n}\left[sx \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. \right] dx \quad \ldots \quad (4{\cdot}9)$$

जहाँ $$S\left[f(x); \begin{bmatrix} m, n \\ p, q \end{bmatrix}; \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix}; s \right] = s \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[sx \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] f(x)\, dx$$

कपूर [8,p. 399] द्वारा अध्ययन किया गया सार्वीकृत $L-H$ परिवर्त है तथा A और B मुख्य प्रमेय के साथ परिभाषित प्राचलों के लिये आये हैं।

जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत यह उपप्रमेय सही उतरती हैं वे मुख्य प्रमेय से सरलता प्राप्य हैं।

यदि हम उपप्रमेय 4 में $n=N=0$, $p=m$, $P=M$, रखें, q तथा m को $m+1$, Q द्वारा और M को $M+1$ द्वारा, a_i को a_i+b_i $(i=1, \ldots, m)$ द्वारा, b_{m+1} को μ द्वारा, e_j को $e_j+f_j (j=1, \ldots, M)$, f_{M+1} को ν द्वारा प्रतिस्थापित करें तो उपप्रमेय 4 एक ज्ञात फल में समानीत हो जाती है जिसे मित्तल [11, p. 35] ने किया है और जो जैन [6, p. 136] तथा गुप्ता [3, p. 140] द्वारा दिये गये फल का सार्वीकरण है

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Trancendental Function, भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953
2. गोयल, एस० पी०, **पोर्तुगाली मैथ०, (प्रकाशनाधीन)**
3. गुप्ता, एच० सी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी साइंस इंडिया,** 1948, **3**, 140.
4. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया,** 1966, **36**(A), 594-609.
5. जैन, एन० सी०, **वही**, 1969, **39**(A), 366.
6. जैन, यू० सी०, **पी एच० डी० थीसिस, उदयपुर विश्वविद्यालय,** 1967, **पृ०** 136.
7. जायसवाल, एम० पी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1968, **12**, 211.
8. कपूर, वी० के०, **प्रोसी०, कैम्ब्रि० फिला० सोसा०,** 1968, **64**, 399.
9. लर्च, ई०, **ऐक्टा० मैथ०,** 1903, **27**, 339,
10. ल्यूक, वाई० एल०, The Special Functions and their Approximations, भाग I, 1969, **न्यूयार्क तथा लन्दन**
11. मित्तल, पी० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1971, **14**, 29-38.
12. निगम, एच० एन०, **ऐक्टा० मैथ०,** 1963, **14**, 331.
13. राइट, ई० एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०,** 1935, **38**, 257.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October, 1974, Pages, 281-285

मृदा में मैंगनीज, ताम्र तथा निकेल की उपलब्धि पर लोह् का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा पद्माकर पाण्डे
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जुलाई, 5, 1974]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन मे मैंगनीज, ताम्र तथा निकेल की उपलब्धि पर लोह् के प्रभाव को इनक्यूबेशन अध्ययन द्वारा स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है। जब मृदा में मैंगनीज, ताम्र तथा निकेल की विभिन्न मात्राएँ डाली गईं तो इनका लगभग 80-90% 15 दिनों में अभिग्रहीत हो गया जो लोह् के डालने से और भी बढ़ गया। जब इनक्यूबेशन का समय 60 दिनों तक बढ़ाया गया तो विनिमेय मैंगनीज तथा ताम्र की मात्रा में थोड़ी सी वृद्धि देखी गई परन्तु विनिमेय निकेल की मात्रा लगभग अपरिवर्तित रही।

Abstract

Availability of soil Mn, Cu and Ni as affected by Fe addition. *By* S. G. Misra and Padmakar Pande, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the present study an attempt has been made to show the effect of iron on the availability of Mn, Cu and Ni by incubation studies. When Mn, Cu and Ni were added to the soil, about 80-90% was found to fix in 15 days which further increased as added Fe was increased. When time of incubation was increased to 80 days, a slight increase in the exchangeable Mn and Cu was recorded while exchangeable Ni remained almost stationary.

फसलोत्पादन में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के महत्व को भली प्रकार से आँक लिया गया है कि ये किसी भी प्रकार मुख्य तत्वों से कम नहीं हैं। ऐसा पाया गया है कि जब मिट्टी में सूक्ष्ममात्रिक तत्व डाले जाते हैं तो मिट्टी के सम्पर्क में आकर न्यूनाधिक मात्रा में परिवर्तित होने की प्रवृत्ति दिखाते हैं। इसके कई कारक बताए गए हैं जिन पर काफी कार्य भी हो चुका है। परन्तु तत्वों के मध्य होने

वाली पारस्परिक या अन्योन्य क्रियाओं पर बिल्कुल ध्यान नहीं दिया गया है। ये क्रियायें न केवल सूक्ष्ममात्रिक तत्व एवं स्थूल तत्वों के बीच वरन् सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के भी मध्य होती हैं। मृदा में अधिक लोह उपलब्ध होने के कारण क्रुक इत्यादि, [1] हैंगर[2] और स्पेन्सर[3] ने क्रमशः मृदा में निकेल, मैंगनीज और ताम्र की उपलब्धि में कमी पाई। चूँकि ये क्रियायें अधिक मात्रा में किसी तत्व के डालने से उत्पन्न होती हैं फलस्वरूप अन्य तत्वों की उपलब्धि प्रभावित होती है। अतः इस बात को देखते हुए अन्योन्य क्रियाओं का अध्ययन आवश्यक है। प्रस्तुत अध्ययन में लोह का प्रभाव मैंगनीज, ताम्र तथा निकेल (भारी धातुओं) की उपलब्धि पर देखा गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए मनौरी (इलाहाबाद) से जलोढ़ मृदा का सतही नमूना (0-15 सेमी०) एकत्र किया गया। मिट्टी को प्रयोगशाला में सुखाने के पश्चात् उसे पीसा गया और फिर 100 छिद्र वाली चलनी से चाल कर संग्रह कर लिया गया। कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुणों का निश्चयन मानक विधियों से किया गया जिसका विवरण सारणी 1 में दिया गया है।

सारणी 1

मिट्टी के कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुण

	गुण	मान
1.	पी-एच	7.5
2.	कैल्सियम कार्बोनेट (%)	0.50
3.	कार्बनिक कार्बन (%)	0.835
4.	उपलब्ध लोह (अंश प्रति दश लक्षांश) ...	4·80
5.	विनिमेय Mn (,,) ...	3.50
6.	विनिमेय Cu (,,) ...	0.55
7.	विनिमेय Ni (,,) ...	0.40
8.	बालू (%)	65.52
9.	सिल्ट (%)	12.65
10.	मृत्तिका (%)	21.83

100 ग्राम मिट्टी को पाइरेक्स बीकरों में लेकर विभिन्न तत्वों से उपचारित किया गया। लोह की (फेरस सल्फेट के रूप में) तीन मात्रायें 7.5, 15.0 तथा 30.0, मैंगनीज की (मैंगनीज सल्फेट के रूप में) दो मात्रायें 25 तथा 50, ताम्र की (कापर सल्फेट के रूप में) दो मात्रायें 15 तथा 30 और निकेल की (निकेल सल्फेट के रूप में) दो मात्रायें 20 तथा 50 अंश प्रतिदशलक्षांश डाली गयीं। सभी तत्व एनालार,

बी० डी० एच० कोटि के प्रयोग में लाए गए तथा विलयन के रूप में डाले गये। उपचारों का विस्तृत विवरण सारणी-2 में दिया हुआ है। उपचारित बीकरों को धूप में रखा गया तथा पुनः आसवित जल डाला गया जिससे कि वे नम हो जायँ। यह् क्रिया नित्यप्रति 60 दिनों तक (इनक्यूबेशन की पूर्ण अवधि तक) चालू रखी गयी। पी-एच तथा तत्वों का निश्चयन तीन अवधियों पर 15, 30 और 60 दिनों पर किया गया। प्रत्येक निश्चयन की अवधि पर मिट्टी को सुखाया गया तथा पीस कर नमूने ले लिये गये और बची हुई मिट्टी को पुनः इनक्यूबेट कर दिया गया।

मिट्टियों का पी-एच लीड्स-नार्थ्रप पी-एच मापी द्वारा 1:2·5 (मृदा: पानी) के अनुपात में किया गया। विनिमेय मैंगनीज, ताम्र और निकेल का निश्चयन $1N NH_4OAc$ (पी-एच 7·0) के निष्कर्षण में क्रमश: चेंग और ब्रे[4], जैक्सन[5] और सैन्डेल[6] की विधियों द्वारा किया गया।

परिणाम और विवेचना

सारणी 2 में विनिमेय मंगनीज, ताम्र तथा निकेल की निष्कर्षित मात्रायें विभिन्न समयों पर दी हुई हैं। सारिणी से स्पष्ट है कि जब मृदा में 50 अंश प्रति दश लक्षांश मैंगनीज, 30 अंश प्रति दश लक्षांश ताम्र तथा 50 अंश प्रति दशलक्षांश निकेल डाला जाता है तो 15 दिन बाद उनकी क्रमशः 8·75, 3.40 तथा 7.85 अंश प्रति दश लक्षांश मात्रायें प्राप्त हो पाती हैं। स्पष्ट है कि इन डाले हुए तत्वों का लगभग 80-90% भाग केवल 15 दिन में ही अभिग्रहीत हो जाता है। जब इन तत्वों के साथ-साथ 30 अंश प्रति दश लक्षांश लोह् को डाला गया तो ये ही मात्रायें घट कर क्रमशः 6·25, 2·90 तथा 7.20 अंश प्रति दश लक्षांश हो गयीं जो कि पहले की प्राप्त मात्राओं से अपेक्षाकृत कम हैं। प्रकट है कि Mn, Cu तथा Ni की उपलब्धि में Fe का प्रभाव पड़ता है। इसे ही अन्योन्य क्रिया कहेंगे। इन क्यूवेशन के फल-स्वरूप सबसे अधिक मैंगनीज ही प्रभावित होता है जबकि ताम्र और निकेल में बहुत ही साधारण अन्तर प्राप्त होता है। ग्रास्मनिस और लीपर[7] ने मैंगनीज के विषैले प्रभाव को लोह-सिट्रेट तथा लोह्-EDTA डालकर कम किया। वालीहान और मिलर[8] को भी लोह्-EDDHA के डालने से इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त हुआ। मूरे इत्यादि[9] ने बताया कि ताम्र का विषैला प्रभाव लोह् के डालने से कम किया जा सकता है। चेशायर इत्यादि[10] ने ऐसा प्रभाव केवल कार्बनिक मिट्टियों में प्राप्त किया और बताया कि इन मिट्टियों में लोह डालनें से जई में भी ताम्र का शोषण अपेक्षाकृत कम हुआ। इसी प्रकार क्रुक इत्यादि[1] ने अधिक लोह् के कारण मृदा में निकेल की भी न्यूनता बताई है।

प्रस्तुत अध्ययन में जैसे ही इनक्यूबेशन का समय बढ़ाया जाता है, मैंगनीज और ताम्र की मात्राओं में साधारण सी वृद्धि होती है जबकि निकेल की मात्रा उतनी ही बनी रहती है। ऐसा अनुमान किया जा सकता है कि समय के साथ लोह् का आक्सीकरण होता है जिसके फलस्वरूप अन्य तत्वों के मानों में थोड़ी सी बढ़ोत्तरी होती है जिसके कारण विनिमेय Mn, Cu तथा Ni की मात्राएँ उस स्तर पर पहुँच जाती हैं जिस स्तर पर ये लोह् की अनुपस्थिति में होती हैं।

सारणी 2

मिट्टी में मिलाये गये Mn, Cu तथा Ni की उपलब्धि पर लोह का प्रभाव

S. No.	उपचार	15 दिनों बाद विनिमेय Mn (ppm)	15 दिनों बाद विनिमेय Cu (ppm)	15 दिनों बाद विनिमेय Ni (ppm)	30 दिनों बाद विनिमेय Mn (ppm)	30 दिनों बाद विनिमेय Cu (ppm)	30 दिनों बाद विनिमेय Ni (ppm)	60 दिनों बाद विनिमेय Mn (ppm)	60 दिनों बाद विनिमेय Cu (ppm)	60 दिनों बाद विनिमेय Ni (ppm)
1.	नियन्त्रण	3·52	0·55	0·40	3·50	0·55	0·40	3·50	0·55	0·40
2.	मृदा + $Mn_1/Cu_1/Ni_1$*	5·60	1·80	3·15	5·60	1·85	3·10	5·70	1·85	2·95
3.	मृदा + $Mn_2/Cu_2/Ni_2$**	8·75	3·40	7·87	8·80	3·50	7·85	8·88	3·55	7·45
4.	मृदा + Fe_1***	3·45	0·55	0·35	3·60	0·55	0·45	3·65	0·54	0·45
5.	मृदा + Fe_1 + $Mn_1/Cu_1/Ni_1$	4·60	1·55	3·10	5·45	1·80	3·30	6·35	2·00	2·95
6.	मृदा + Fe_1 + $Mn_2/Cu_3/Ni_2$	7·50	3·15	7·60	7·85	3·45	7·85	8·35	3·75	7·30
7.	मृदा + Fe_2	3·40	0·45	0·35	3·55	0·54	0·40	3·65	0·54	0·42
8.	मृदा + Fe_2 + $Mn_1/Cu_1/Ni_1$	4·10	1·35	3·00	5·20	1·65	3·20	5·80	1·92	2·95
9.	मृदा + Fe_2 + $Mn_2/Cu_2/Ni_2$	7·10	3·05	7·45	7·40	3·35	7·60	8·30	3·70	7·20
10.	मृदा + Fe_3	3·15	0·40	0·35	3·20	0·53	0·40	3·32	0·52	0·40
11.	मृदा + Fe_3 + $Mn_1/Cu_1/Ni_1$	3·45	1·20	2·85	4·05	1·45	3·00	5·10	1·75	2·90
12.	मृदा + Fe_3 + $Mn_2/Cu_2/Ni_2$	6·25	2·90	7·20	7·00	3·20	7·40	8·18	3·55	7·00

*$Mn_1=25$, अंश/दशलक्षांश $Cu_1=15$, $Ni_1=20$ अंशदशलक्षांश

**$Mn_2=50$, $Cu_2=30$, $Ni_2=50$,, ,,

***$Fe_1=7·5$, $Fe_2=15·0$, $Fe_3=30·0$,, ,,

निर्देश

1. क्रुक, डब्लू० एम०, हण्टर, जे० जी० तथा वर्गनानो, ओ०, **ऐनु० ऐप्ला० बायो०**, 1954, **41**, 311-24.
2. हैंगर, बी० सी०, **जर्न० आस्ट्रे० इन्स्टि० एग्री० साइंस**, 1965, **31**, 315-17.
3. स्पेन्सर, डब्लू० एफ०, **सॉयल साइंस**, 1966, **112**, 296-99.
4. चेंग, के० एल० तथा ब्रे०, आर० एच०, **ऐना० केमि०**, 1953, **25**, 655-59.
5. जैक्सन, एम० एल०, सॉयल केमिकल ऐनालिसिस, 1962, **एशिया पब्लिशिंग हाउस**
6. सैण्डेल, इ० बी०, कलरीमेट्रिक डेटर्मिनेशस आफ ट्रेसेज आफ मेटल्स, 1950, **इण्टर साइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क**
7. ग्रास्मनिस, व्ही० ओ० तथा लीपर, जो० डब्लू०, **प्लाण्ट एण्ड सॉयल**, 1966, **25**, 41-48.
8. वालीहान ई० एफ० तथा मिलर, एम० पी०, **प्रोसी० अमे० सोसा० हार्टि० साइंस**, 1968, **93**, 411-44.
9. मूरे, डी० पी०, हार्वर्ड, डी० डी० एम०, हाडर, डब्लू० एल० एल० तथा जैक्सन, डब्लू ए०, **सॉयल साइंस सोसा० अमे० प्रोसी०**, 1957, **21**, 65-74.
10. चेशायर, एम० वही०, डेकाक, पी० सी० तथा डंकसन, आर० एच० ई०, **जर्न० साइंस फूड एग्री०**, 1967, **18**, 156-60.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October 1974, Pages 287-292

कतिपय फलनों के हैंकेल परिवर्त पर एक टिप्पणी

डी० सी० गुखरू
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

[प्राप्त—अक्टूबर 25, 1972]

सारांश

इस टिप्पणी का उद्देश्य संक्रियात्मक कलन द्वारा कतिपय फलनों का हैंकेल परिवर्त प्राप्त करना है।

Abstract

On Hankel transform of certain functions. *By* D. C. Gokhroo, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The aim of the present note is to obtain the Hankel transform of some functions with the help of Operational Calculus.

1. हैंकेल परिवर्त को

$$\phi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(pt)\, h(t)\, dt \qquad \ldots \quad (1)$$

द्वारा परिभाषित करते हैं। इसे

$$\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} h(t)$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा।

इस टिप्पणी में सर्वत्र परम्परागत संकेत का प्रयोग लैप्लास $\phi(p) \doteq h(t)$ के समाकल

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\, h(t)\, dt \qquad \ldots \quad (2)$$

को प्रदर्शित करने के लिये किया जावेगा, बशर्ते $R(p)>0$ तथा समाकल अभिसारी हो।

2. **प्रमेय 1.** यदि $\phi(p) \doteqdot h(t)$

तथा $\psi(p, \nu, \lambda) \doteqdot t^{-\nu-1} e^{-\lambda/t} h(t)$

तो
$$\int_0^\infty t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu(pt)(a+bt^2)^{-1} \phi(a+bt^2)\, dt = \frac{p^\nu}{a(2b)^{\nu+1}} \psi\left(a, \nu, \frac{p^2}{4b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों, $R(\nu) > -1$, $R(b) > 0$, $|\arg a| < \pi$ तथा $h(t)$ λ पर निर्भर न हो। अथवा दूसरे शब्दों में,

$$t^{\nu+1/2} (a+bt^2)^{-1} \phi(a+bt^2) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{p^{\nu+1/2}}{a(2b)^{\nu+1}} \psi\left(a, \nu, \frac{p^2}{4b}\right).$$

उपपत्ति

चूँकि $\phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} h(t)\, dt$

इसलिये
$$\int_0^\infty t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu(pt)(a+bt^2)^{-1} \phi(a+bt^2)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu(pt) \left\{ \int_0^\infty e^{-(a+bt^2)x} h(x)\, dx \right\} dt$$

$$= \frac{1}{p^{1/2}} \int_0^\infty e^{-ax} h(x) \left\{ \int_0^\infty (pt)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(pt)\, t^{\nu+1/2} e^{-bx\,t^2} dt \right\} dx$$

$$= \frac{p^\nu}{(2b)^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-ax} x^{-\nu-1} e^{-p^2/4bx} h(x) dx$$

$$= \frac{p^\nu}{a(2b)^{\nu+1}} \psi\left(a, \nu, \frac{p^2}{4b}\right)$$

समाकल के क्रम को परिवर्तित करने पर तथा सूत्र [3, p. 29(10)] की सहायता के आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^\infty (pt)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(pt)\, t^{\nu+1/2} e^{-at^2} dt = \frac{p^{\nu+1/2}}{(2a)^{\nu+1}} e^{-\frac{p^2}{2a}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

जहाँ $R(a) > 0$ तथा $R(\nu) > -1$.

सन्निहित समाकलों के पूर्णतया अभिसारी होने पर द ला पूसिन के प्रमेय [1, p. 504] की सहायता से समाकलन के क्रम परिवर्तन को मान्य बताया जा सकता है।

उदाहरण 1 : सक्सेना [4, p. 402(11)] के फल का उपयोग करने पर

$$h(t)=t^{\nu}k_{\mu}\left(\frac{\gamma}{t}\right)$$

$$\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}}\left(\frac{2}{p}\right)^{\nu+1}S_{4}\left[1+\frac{\nu}{2},\frac{1+\nu}{2},\frac{\mu}{2},-\frac{\mu}{2};\frac{rp}{4}\right]$$

$$=\phi(p)$$

जहाँ $R(p)>0$ तथा $R(r)\geqslant 0$.

अतः एर्डेल्यी [2, p. 202(19)] के फल से

$$t^{-\nu-1}e^{-\lambda/t}h(t)=t^{-1}e^{-\lambda/t}k_{\mu}\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot 2p\,k_{\mu}[\sqrt{p}\{(\lambda+r)^{1/2}+(\lambda-r)^{1/2}\}]k_{\mu}[\sqrt{p}\{(\lambda+r)^{1/2}-(\lambda-r)^{1/2}\}]$$

$$=\psi(p.\,D,\lambda)$$

जहाँ $R(p)>0$ तथा $R(\lambda\pm r)>0$.

(3) में $\phi(p)$ तथा $\psi(p,0,\lambda)$ के मानों का प्रयोग करने पर देखा जाता है कि

$$t^{\nu+1/2}(a+bt^{2})^{-\nu-2}S_{4}\left[1+\frac{\nu}{2},\frac{1+\nu}{2},\frac{\mu}{2},\frac{-\mu}{2}:\frac{r}{4}(a+bt^{2})\right]\overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}}\frac{\sqrt{\pi^{r}}}{(ab)^{\nu+1}}\frac{(p)^{\nu+1/2}}{2^{\nu}}\times$$

$$k_{\mu}\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^{2}}{4b}+r\right)^{1/2}+\left(\frac{p^{2}}{4b}-r\right)^{1/2}\right\}\right]k_{\mu}\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^{2}}{4b}+r\right)^{1/2}-\left(\frac{p^{2}}{4b}-r\right)^{1/2}\right\}\right]\quad(5)$$

$R(\nu)>-1$, $R(b)>0$, $R(r)>0$ तथा $|\arg|<\pi$ विशेष रूप से यदि हम $\mu=\frac{1}{2}$, लें तो हमें ज्ञात हैंकेल परिवर्त [54*b*,p. 72(35)] प्राप्त होता है ।

उदाहरण 2 : सक्सेना [4, p. 402 (11)] के फल का प्रयोग करने पर

$$h(t)=t^{\nu}e^{r/t}k_{\mu}\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot\frac{\cos\mu\pi\,p^{-\nu-1/2}}{\sqrt{(2\pi r)}}E(\tfrac{3}{2}+\nu,\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu::2rp)$$

$$=\phi(p)$$

जहाँ $R(p)>0$, $R(\nu)>-\frac{3}{2}$, $R(r)>0$.

अतः एर्डेल्यी [2, p. 202(19)] के फल से

$$t^{-\nu-1}e^{-\lambda/t}h(t)=t^{-1}e^{-(\lambda-r)/t}k_{\mu}\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot 2p\,k_{\mu}[\sqrt{p}\{\lambda^{1/2}+(\lambda-2r)^{1/2}\}]\,k_{\mu}[\sqrt{p}\{\lambda^{1/2}-(\lambda-2r)^{1/2}\}]$$

$$=\psi(p,0,\nu)$$

जहाँ $R(p)>0$, $R(\lambda)>R(\lambda-2r)>0$.

(3) में उपर्युक्त संगतता का प्रयोग करने पर हमें

$$t^{\nu+1/2}\,(a+bt^2)^{-\nu-3/2}\,E[\tfrac{3}{2}+\nu,\ \tfrac{1}{2}+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\mu::2r(a+bt^2)]\ \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\ \frac{\sqrt{(\pi r)}\ p^{\nu+1/2}}{\cos\mu\pi\ b^{\nu+1}\ 2^{\nu-1/2}}$$

$$k_\mu\left[\sqrt{a}\left\{\frac{p}{2\sqrt{b}}+\left(\frac{p_2}{4b}-2r\right)^{1/2}\right\}\right]k_\mu\left[\sqrt{a}\left\{\frac{p}{2b}-\left(\frac{p^2}{4b}-2r\right)^{1/2}\right\}\right] \quad (6)$$

प्राप्त होता है जहाँ $R(\nu)>-1$, $R(b)>0$, $|\arg r|<3\pi/2|\arg a|<\pi$.

उदाहरण 3 : सक्सेना [4, p. 402(10)] का फल

$$h(t)=t^\nu\,e^{-r/t}\,k_\mu\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot\frac{\sqrt{\pi}}{p^\nu}\,G^{30}_{13}\left(2rp\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\\1+\nu,\ \mu,\ -\mu\end{matrix}\right)$$

$$=\phi(p)$$

लेने पर जहाँ $R(p)>0$, तथा $R(r)>0$.

अत: एर्डेल्यी [2, p. 202(19)] से

$$t^{-\nu-1}\,e^{-\lambda/t}\,h(t)=t^{-1}\,e^{-(\lambda+r)/t}\,k_\mu\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot 2p\,k_\mu[\sqrt{p}\{(\lambda+2r)^{1/2}+\lambda^{1/2}\}]k_\mu[\sqrt{p}\{(\lambda+2r)^{1/2}-\lambda^{1/2}\}]$$

$$=\psi(p,0,\lambda)$$

जहाँ $R(\lambda)>0$, $R(\lambda+r)>0$ तथा $R(p)>0$.

उपर्युक्त संगतताओं में (3) को व्यवहृत करने पर

$$t^{\nu+1/2}\,(a+bt^2)^{-\nu-1}\,G^{30}_{13}\left(2r(a+bt^2)\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\\1+\nu,\ \mu,\ -\mu\end{matrix}\right)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\frac{p^{\nu+1/2}}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,b^{\nu+1}}\times$$

$$k_\mu\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^2}{4b}+2r\right)^{1/2}+\frac{p}{2\sqrt{b}}\right\}\right]k_\mu\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^2}{4b}+2r\right)^{1/2}-\frac{p}{2\sqrt{b}}\right\}\right] \quad (7)$$

प्राप्त होता है जहाँ $R(\nu)>-1$, $R(b)>0$, $|\arg a|<\pi$, $|\arg r|<\pi$.

विशेषतया, यदि हम $\mu=-\frac{1}{2}$ लें तो हमें ज्ञात हैंकेल परिवर्त [2, p. 72(33)] प्राप्त होता है ।

उदाहरण 4 : सक्सेना [4, p. 402(11)] का फल

$$h(t)=t^{\nu}\, e^{-r/t}\, I_{\mu}\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\, p^{\nu}}\, G_{13}^{21}\left(2rp\Big|{}^{\frac{1}{2}}_{1+\nu,\ \mu, -\mu}\right)$$

$$=\phi(p)$$

लेने पर जहाँ $R(p)>0$ तथा $|\arg r|<\frac{1}{2}\pi$

अतः एर्डेल्यी [2. p. 200(4)] से

$$t^{-\nu-1}\, e^{-\lambda/t}\, h(t)=t^{-1}\, e^{-(\lambda+r)/t}\, I_{\mu}\left(\frac{r}{t}\right)$$

$$\doteqdot 2p\, k_{\mu}[\sqrt{p}\{(\lambda+2r)^{1/2}+\lambda^{1/2}\}]\ I_{\mu}[\sqrt{p}\{(\lambda+2r)^{1/2}-\lambda^{1/2}\}]$$

$$=\psi(p, 0, \lambda)$$

जहाँ $R(p)>0$, तथा $R(r)>0$.

(3) में $\phi(p)$ तथा $\psi(p, 0, \lambda)$ के मानों का उपयोग करने पर हमें

$$t^{\nu+1/2}\, (a+bt^2)^{-\nu-1}\ G_{13}^{21}\left(2r(a+bt^2)\Big|{}^{\frac{1}{2}}_{1+\nu,\ \mu,\ -\mu}\right) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{\sqrt{\pi}\, p^{\nu+1/2}}{2^{\nu}\, (b)^{\nu+1}} \times$$

$$k_{\mu}\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^2}{4b}+2r\right)^{1/2}+\frac{p}{2\sqrt{b}}\right\}\right] I_{\mu}\left[\sqrt{a}\left\{\left(\frac{p^2}{4b}+2r\right)^{1/2}-\frac{p}{2\sqrt{b}}\right\}\right] \quad (\varepsilon)$$

प्राप्त होगा जहाँ $R(\nu)>-1$, $R(b)>0$ $|\arg r|<\pi$, $|\arg a|<\pi$

उदाहरण 5 : एर्डेल्यी [2, p. 198(27)] के फल

$$h(t)=t^{\nu}\, k_{\mu}(\tfrac{1}{2}t)$$

$$\doteqdot \sqrt{\pi}\, p\, \frac{\Gamma(1+\nu\pm\mu)}{(p^2-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}}\ P_{\mu-1/2}^{-(\nu+1/2)}\ (2p)$$

$$=\phi(p)$$

को लेने पर जहाँ $R(1+\nu\pm\mu)>0$ तथा $R(p+\frac{1}{2})>0$.

अतः एर्डेल्यी [2, p. 198(29)] से

$$t^{-\nu-1}\, e^{-\lambda/t}\, h(t)=t^{-1}\, e^{-\lambda/t}\, k_{\mu}(\tfrac{1}{2}t)$$

$$\doteqdot 2p\, k_{\mu}\left[\sqrt{(2\lambda)}\left\{p+\sqrt{\left(p^2-\frac{1}{4\lambda}\right)}\right\}^{1/2}\right] k_{\mu}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{p+\sqrt{\left(p^2-\frac{1}{4\lambda}\right)}\right\}^{-1/2}\right]$$

$$=\psi(p, 0, \lambda)$$

जहाँ $R(p+\frac{1}{2})>0$ तथा $R(\lambda)>0$.

ऊपर्युक्त संगतताओं में (3) को व्यवहृत करने पर हमें

$$t^{\nu+1/2}\{(a+bt^2)^2-\tfrac{1}{4}\}^{-\nu/2-1/4}\ P_{\mu-1/2}^{-(\nu+1/2)}[2(a+bt^2)] \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{p^{\nu+1/2}}{\Gamma(1+\nu\pm\mu)\sqrt{\pi}\ 2^{\nu}\ (b)^{\nu+1}}$$
$$k_{\mu}\left[\sqrt{\left(\frac{p}{2b}\right)}\left\{ap+\sqrt{(a^2p^2-b)}\right\}^{1/2}\right]k_{\mu}\left[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)}\left\{ap+\sqrt{(a^2p^2-b)}\right\}^{-1/2}\right] \quad \ldots \quad (9)$$

प्राप्त होगा जहाँ $R(\nu)>-1$, $R(b)>0$, $R(\mu)>\frac{1}{2}$ तथा $|\arg a|<\pi$.

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे० आई०, An Introduction to the theory of Infinite series. **लन्दन मैकमिलन एण्ड कम्पनी** 1959.
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954.
3. वही, Tables of Integral transforms, भाग II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.
4. सक्सेना आर० के०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया,** 1960, **26**A, 400-413.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October 1974, Pages 293-296

बेसिल फलनों वाले कतिपय अपरिमित समाकल

आर० एस० जौहरी
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, कोटा

[प्राप्त—जून 29, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य संक्रियात्मक कलन सम्बन्धी एक प्रमेय की सहायता से बेसिल फलन वाले कतिपय अपरिमित समाकलों का मान ज्ञात करना तथा $k_\nu(x)$ के लिये रोचक समाकल निरूपण प्राप्त करना है।

Abstract

Some infinite integrals involving Bessel functions. *By* R. S. Johri Department of Mathematics, Government College, Kota.

The object of the present paper is to evaluate some infinite integrals involving Bessel functions with the help of a theorem on operational calculus proved in 3 and to obtain an interesting integral representation of $k_\nu(x)$.

1. फलन $f(x)$ का लैप्लास परिवर्त समीकरण

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

द्वारा दिया जाता है जिसे हम सांकेतिक रूप से

$$\phi(p) \doteqdot f(x)$$

द्वारा अंकित करेंगे।

फलन $f(x)$ का हैंकेल परिवर्त

$$\phi(p) = \int_0^\infty (px)^{1/2} J_\nu(px)\, f(x)\, dx \quad (p>0)$$

के द्वारा दिया जाता है जिसे हम सांकेतिक रूप से

$$\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(x)$$

द्वारा लिखेंगे ।

हैंकेल परिवर्त के लिये पार्सेवाल प्रमेय का कथन है

यदि $\phi_1(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f_1(x)$ तथा $\phi_2(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f_2(x)$

तो $$\int_0^\infty f_1(x)\, f_2(p)\, dx = \int_0^\infty \phi_1(p)\, \phi_2(x)\, dp$$

बशर्ते कि सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हों ।

2. प्रमेय : यदि $$\phi(p) \doteqdot x^{-3/2} e^{-\alpha/x} f(x) \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

तथा $$\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(x) \quad \ldots \quad (2\cdot2)$$

तो $$\phi(p) = 2\int_0^\infty t^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu[2\alpha(p^2+t^2)^{1/2} - 2\alpha p]^{1/2}\, k_\nu[2\alpha(p^2+t^2)^{1/2} + 2\alpha p]^{1/2}\, \psi(t)\, dt \quad \ldots \quad (2\cdot3)$$

बशर्ते कि सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हो तथा $R(\alpha) > 0,\ p > 0$

उपपत्ति : एर्डेल्यी [2, p. 30(16)] को लेंगे

$$2p^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu[2\alpha(\beta^2+p^2)^{1/2} - 2\alpha\beta]^{1/2}\, k_\nu[2\alpha(\beta^2+p^2) + 2\alpha\beta]^{1/2} \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} x^{-3/2}\, e^{-\alpha x - \beta x} \quad \beta > 0,\ R(\alpha) > 0$$

पुनः (2·2) से

$$\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(x)$$

हैंकेल परिवर्त के लिये पार्सेवाल प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty x^{-3/2}\, e^{-\alpha/x}\, e^{-\beta x} f(x) = 2\int_0^\infty p^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu[2\alpha(\beta^2+p^2)^{1/2} - 2\alpha\beta]^{1/2}\, k_\nu[2\alpha(\beta^2+t^2) + 2\alpha\beta]^{1/2}\, \psi(p)\, dp$$

$$= 2\int_0^\infty t^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu[2\alpha(\beta^2+t^2)^{1/2} - 2\alpha\beta]\, k_\nu[2\alpha(\beta^2+t^2)^{1/2} + 2\alpha\beta]^{1/2}\, \psi(t)\, dt$$

β को p द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (2·1) का प्रयोग करने पर हमें

$$\phi(p)=2\int_0^\infty t^{1/2}\, J_\nu[2a(p^2+t^2)^{1/2}-2ap]^{1/2}\, k_\nu[2a(p^2+t^2)^{1/2}+2ap]^{1/2}\, \psi(t)\, dt$$

प्राप्त होगा बशर्ते सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हो तथा $R(a)>0,\ p>0.$

सम्प्रयोग 1 : एर्डेल्यी [2, p. 30(15)] को लेंगे

$$f(x)=x^{-3/2}\, e^{-\delta/x} \underset{\nu}{\overset{J}{=}} 2p^{1/2}\, J_\nu[2\delta p]^{1/2}\, k_\nu[2\delta p]^{1/2}$$

$$=\psi(p), \text{ जहाँ } R(\delta)>0.$$

(2·1) में $f(x)$ का मान रखने पर

$$\phi(p)\doteqdot x^{-3}\, e^{-(a+\delta/x)}$$

अथवा
$$\phi(p)=2\left(\frac{a+\delta}{2}\right)^{-1} k_{-2}[2p^{1/2}(a+\delta)^{1/2}],$$

$R(\sigma+\delta)>0,\ p>0$ [एर्डेल्यी (1, p. 146(29))]

(2·3) में $\psi(t)$ तथा $\phi(p)$ का मान रखने पर

$$\int_0^\infty t\, J_\nu\{(2a)^{1/2}[(p^2+t^2)^{1/2}-p]^{1/2}\}\, k_\nu\{(2a)^{1/2}[(p^2+t^2)^{1/2}+p^{1/2}\}\, J_\nu[2\delta t]^{1/2}\, k_\nu[2\delta t]^{1/2}\, dt$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a+\delta}{p}\right)^{-1} k_{-2}[2p^{1/2}(a+\delta)^{1/2}]$$

जो $R(a+\delta)>0,\ R(\delta)>0\ R(a)>0,\ R(\nu)>-1,\ p>0.$ के लिये मान्य है। इससे $k_\nu(x)$ का समाकल निरूपण प्राप्त होता है।

सम्प्रयोग 2 : एर्डेल्यी [2, p. 30(16)] को लेंगे

$$f(x)=x^{-3/2}\, e^{-\delta/x-\sigma x}$$

$$\underset{\nu}{\overset{J}{=}} 2p^{1/2}\, J_\nu\{(2\delta)^{1/2}[(2\delta)^{1/2}[(\sigma^2+p^2)^{1/2}-\sigma]^{1/2}\}k_\nu\{(2\delta)^{1/2}[(\sigma^2+p^2)^{1/2}+\sigma]^{1/2}\}$$

$$=\psi(p) \text{ जहाँ } R(\delta)>0,\ \ R(\sigma)>0.$$

(2·1) में $f(x)$ का मान रखने पर

$$\phi(p)\doteqdot x^{-3}\, e^{-(a+\delta/x)-\sigma x}$$

अथवा
$$\phi(p)=2\left(\frac{p+\sigma}{a+\delta}\right) k_{-2}[2(a+\delta)^{1/2}(p+\sigma)^{1/2}],$$

$R(a+\delta)>0,\ (p+\sigma)>0$ [एर्डेल्यी 1, p. 146(29)]

(2·3) में $\psi(t)$ तथा $\phi(p)$ का मान रखने पर तथा प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty t\, J_\nu\{(2a)^{1/2}[(p^2+t^2)^{1/2}-p]^{1/2}\}\, k_\nu\{(2a)^{1/2}[(p^2+t^2)^{1/2}+p]^{1/2}\}$$

$$J_\nu\{(2\delta)^{1/2}[(\sigma^2+t^2)^{1/2}-\sigma]^{1/2}\}\, k_\nu\{(2\delta)^{1/2}[(\sigma^2+t^2)^{1/2}+\sigma]^{1/2}\}\, dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p+\sigma}{a+\delta}\right) k_{-2}[2(a+\delta)^{1/2}(p+\sigma)^{1/2}]$$

जो $R(a+\delta)>0$, $(p+\sigma)>0$, $R(a)>0$, $R(\delta)>0$, $R(\nu)>-1$, $R(\sigma)>0$, $p>0$. के लिये मान्य है। इससे $k_\nu(x)$ के लिये रोचक समाकल निरूपण प्राप्त होता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क 1954.

2. वही, Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No.4, October, 1974, Pages 297-301

जैकोबी, लागेर तथा सार्वीकृत राइस की बहुपदियों के लिये जनक फलन

बी० एम० श्रीवास्तव
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—जून 29, 1973]

सारांश

इस टिप्पणी में जैकोबी, लागेर तथा सार्वीकृत राइस की बहुपदियों के तीन जनक सम्बन्धों की स्थापना की गई है। कुछ ज्ञात तथा नवीन विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है।

Abstract

Generating functions for Jacobi, Laguerre and generalized Rice's polynomials. *By* B. M. Shrivastava, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa.

In this note three generating relations for Jacobi, Laguerre and generalized Rice's polynomials have been established and a few known and new particular cases have also been discussed.

1. ब्रैफमैन[1], करलिट्ज[2], फेल्डहीम[4], खान[5,6] तथा शर्मा और मित्तल[9] ने ज्ञात बहुपदियों के रूप में जैकोबी लागेर, हर्माइट आदि के रूप में जनक सम्बन्ध प्राप्त किये हैं। इन बहुपदियों की उपयोगिता से प्रेरित होकर हमने कुछ नवीन जनक सम्बन्ध ज्ञात किये हैं जो जैकोबी, लागेर तथा सार्वीकृत राइस की बहुपदियों के रूप में हैं। कुछ ज्ञात तथा नवीन विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है। जनक फलनों में दो चरों वाली हार्न का फलन [3, p. 225] सन्निहित है।

जैकोबी बहुपदी [8, p. 254] को

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\ 1+\alpha+\beta+n;\ 1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (1\cdot1)$$

$$Re\,(\alpha)>-1,\ Re\,(\beta)>-1.$$

के द्वारा और लागेर बहुपदी [8, p. 200] को

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_1F_1(-n;\,1+\alpha;\,x), \quad \ldots \quad (1\cdot2)$$

$$Re(\alpha)>-1.$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। सार्वीकृत राइस की बहुपदी को खांडेकर [7, p. 158] ने

$$H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi,p,v)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\,n+\alpha+\beta+1,\xi\\ 1+\alpha,\,p\end{matrix};v\right] \quad \ldots \quad (1\cdot3)$$

के रूप में परिभाषित किया है।

वांछित हार्न के फलन H_3, H_4 तथा H_6 को

$$H_3[\alpha,\beta,\gamma,x,y]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!\,n!}x^m y^n, \quad \ldots \quad (1\cdot4)$$

$$|x|<r,\ |y|<s,\ r+(s-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}.$$

$$H_4[\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\delta)_n\,m!\,n!}x^m y^n, \quad \ldots \quad (1\cdot5)$$

$$|x|<r,\ |y|<s;\ 4r=(s-1)^2.$$

$$H_6[\alpha,\gamma,x,y]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_{m+n}\,m!\,n!}x^m y^n, \quad \ldots \quad (1\cdot6)$$

$$|x|<1/4.$$

द्वारा परिभाषित करते हैं।

2. इस अनुभाग में हम निम्नांकित जनक सम्बन्ध प्राप्त करेंगे :

$$(1-x)^{-\alpha}H_3\left[\alpha,-\beta,\gamma,-\frac{x(1-y)}{2(1-x)^2},-\frac{x}{1-x}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}x^m P_m^{(\beta+\gamma-1,\alpha-\beta-\gamma)}(y) \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

जहाँ $\left|\frac{x(1-y)}{2(1-x)^2}\right|<r,\ \left|\frac{x}{1-x}\right|<s;\ r+(s-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4},\ Re(\beta)>-1,\ Re(\alpha)>-1.$

$$(1-x)^{-\alpha}H_4\left[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\delta,-\frac{xy}{(1-x)^2},\frac{-x}{1-x}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\delta-\beta)_m}{(\delta)_m(1+\beta-\delta-m)_m}x^m H_m^{(\beta-\delta-m,-m-\beta)}(\alpha+m,\gamma,y), \quad \ldots \quad (2\cdot2)$$

जहाँ
$$\left|\frac{xy}{(1-x)^2}\right|<r,\ \left|\frac{x}{1-x}\right|<s;\ 4r=(s-1)^2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_n}{n!}H_6[-\lambda+n,\gamma,x,y]z^n$$

$$=(1-z)^{\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_{2s}}{(\gamma)_s(1+\lambda-2s)_s}\frac{x^s}{(1-z)^{2s}}L_s^{(\lambda-2s)}\left\{\frac{y(1-z)}{x}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot3)$$

जहाँ $|x|<\frac{1}{4},\ Re(\lambda-n)>-1.$

उपपत्ति :

$$\phi=(1-x)^{-\alpha}H_3\left[\alpha,-\beta,\gamma,-\frac{x(1-y)}{2(1-x)^2},\frac{-x}{1-x}\right]$$

पर विचार करें और फिर फल (1·4)

$$(1-x)^{-a}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i}{i!}x^i \quad \ldots \quad (2\cdot4)$$

तथा $(\alpha)_k(\alpha+k)_n=(\alpha)_{n+k}$ को प्रयुक्त करें तो हम देखेंगे कि

$$\phi=\sum_{m,n,i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n+i}(-\beta)_n(-1)^{m+n}x^{m+n+i}}{(\gamma)_{m+n}m!\,n!\,i!}\left(\frac{1-y}{2}\right)^m$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(\alpha)_{2m+n}(-\beta)_{n-i}(-1)^{m+n-i}x^{m+n}}{(\gamma)_{m+n-i}m!\,(n-i)!\,i!}\left(\frac{1-y}{2}\right)^m$$

तब, आन्तरिक संकलन को पलट देने पर

$$\phi=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(\alpha)_{2m+n}(-\beta)_i(-1)^{m+i}x^{m+n}}{(\gamma)_{m+i}m!\,i!\,(n-i)!}\left(\frac{1-y}{2}\right)^m$$

जो (2·4) के प्रयोग से $(n-i)!=(-1)^i n!/(-n)_i$ तथा ${}_2F_1(-n,b;c;1)=(c-b)_n/(c)_n$ बशर्ते

$$\phi=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta+\gamma+m)_n(-1)^m x^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma+m)_n m!\,u!}\left(\frac{1-y}{2}\right)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta+\gamma+m-n)_n(-1)^{m-n}x^m}{(\gamma)_{m-n}(\gamma+m-n)_n(m-n)!\,n!}\left(\frac{1-y}{2}\right)^{m-n}$$

अन्तिम रूप से आन्तरिक संकलन को पलटने तथा $(a+k)_{n-k}=(a)_n/(a)_k$ को प्रयुक्त करने पर हमें

$$\phi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(\beta+\gamma)_m}{(\gamma)_m\,m!}\,x^m\;{}_2F_1\left(-m,\,a+m;\,\beta+\gamma;\,\frac{1-y}{2}\right),$$

प्राप्त होगा जो (1·1) के प्रकाश में (2·1) प्रदान करेगा।

इसी प्रकार अग्रसर होने पर तथा (1·3) का प्रयोग करने पर हमें (2·2) प्राप्त होता है।

(2·3) को सिद्ध करने के लिये हम

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_n}{n!}\,H_6[-\lambda+n,\,\gamma,\,x,\,y]z^n$$

पर विचार करेंगे।

H_6 को श्रेणी रूप में, जैसा कि (1·6) में दिया हुआ है, व्यक्त करने पर

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_n}{n!}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-\lambda+n)_{2r+s}}{(\gamma)_{r+s}\,r!\,s!}\,x^r\,y^s\,z^n.$$

पुनः फल

$(-\lambda)_n\,(-\lambda+n)_{2r+s}=(-\lambda)_{n+2r+s}=(-\lambda)_{2r+s}\,(-\lambda+2r+s)_n$ तथा (2·4) का उपयोग करने पर हमें

$$\psi=(1-z)^{\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_{r+s}}{(\gamma)_s\,r!\,(s-r)!}\,\frac{x^r}{(1-z)^{2r}}\left(\frac{y}{1-z}\right)^{s-r}$$

प्राप्त होगा।

आन्तरिक संकलन के क्रम को पलटने पर तथा सरलीकरण से

$$\psi=(1-z)^{\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{s}\frac{(-\lambda)_{2s}\,(-s)_r}{(1+\lambda-2s)_r\,(\gamma)_s\,s!\,r!}\left(\frac{x}{(1-z)^2}\right)^{s-r}\left(\frac{y}{1-z}\right)^{r}$$

प्राप्त होगा जो (1·2) के प्रकाश में (2·3) प्रदान करता है।

3. विशिष्ट दशायें

(2·1) में $a-\gamma$ रखने पर तथा गॉस के हाइपरज्यामितीय फलन में श्रेणी को व्यक्त करने पर

$$(1-x)^{-\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta!}{(\beta-m)!\,m!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m {}_2F_1\left[\frac{\alpha-m}{2},\frac{\alpha+m+1}{2};\frac{2x(y-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}x^m\,P_m^{(\alpha+\beta-1,-\beta)}(y).$$

$$\alpha+m; \qquad \ldots \quad (4\cdot1)$$

H_6 को श्रेणी रूप में व्यक्त करने पर तथा फल (2·4) को प्रयुक्त करने पर खान[5] द्वारा प्राप्त ज्ञात फल मिलता है। पुनः, $\gamma=-\lambda$ रखने पर तथा अभ्यास 10 के एक अंश [8, p. 70] का व्यवहार करने पर

$$\left[1-\frac{4x}{(1-z)^2}\right]^{-1/2}\left[\frac{2}{1+\sqrt{\left(1-\frac{4x}{(1-z)^2}\right)}}\right]^{-\lambda-1}\operatorname{Exp}\left[\frac{2y}{(1-z)+\sqrt{\{(1-z)^2-4x\}}}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_{2m}}{(-\lambda)_m(1+\lambda-2m)_m}\frac{x^m}{(1-z)^{2m}}L_m^{(\lambda-2m)}\left\{\frac{y(1-z)}{x}\right\} \quad (4\cdot2)$$

पुनः (4·2) में $\gamma=-\lambda=-1$ रखने पर तथा दायें पक्ष को सरल करने पर

$$\left[1-\frac{4x}{(1-z)^2}\right]^{-1/2}\operatorname{Exp}\left[\frac{2y}{(1-z)+\sqrt{\{1-z)^2-4x\}}}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!\,\Gamma(-2m)}{m!\,\Gamma(-m)}\frac{x^m}{(1-z)^{2m}}L_m^{(-1-2m)}\left\{\frac{y(1-z)}{x}\right\}. \qquad \ldots \quad (4\cdot3)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० फतेहसिंह का आभारी है जिन्होंने सभी प्रकार का पथ-प्रदर्शन किया। सुविधायें प्रदान करने के लिये कालेज के प्राचार्य डा० खांडेकर भी धन्यवाद के पात्र हैं।

निर्देश

1. ब्रैफमैन, एफ०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1951, **2**, 942-949.
2. कार्लिट्ज, एल०, Boll. Un. Mat. Ital, 1963, **18**, 87-89.
3. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions. भाग 1, **मैकग्राहिल**, 1953.
4. फेल्डहीम, ई०, **ऐक्टा० मैथ०**, 1942, **75**, 117-138.
5. खान, आई० ए०, **इंडियन जर्न० प्योर० ऐण्ड ऐप्लाइड मैथ०**, 1972, **3**(3), 437-442.
6. वही, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1972, **32**, 179-186.
7. खांडेकर, पी० आर०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1964, **34**A, 157-162.
8. रेनविले, ई० डी०, Special Functions. **मैकमिलन, न्यूयार्क**, 1960.
9. शर्मा, बी० एल० तथा मित्तल के० सी०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1968, **64**,691-694

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October, 1974, Pages 303-310

विभिन्न विलायकों में निष्कर्षित नीले परक्रोमेट और उनके जलीय अपघटन उत्पादों का अध्ययन

बलवन्त सिंह राजपूत एवं हिम्मतलाल जैन

रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—जुलाई 13, 1974]

सारांश

ईथर, ऐमिल ऐसीटेट तथा आइसोऐमिल ऐल्कोहल इन तीन विभिन्न विलायकों में निष्कर्षित नीले परक्रोमेट और उनके जलीय अपघटन उत्पादों का अध्ययन किया गया है। इन विलायकों में नीले परक्रोमेट की स्थिरता ईथर > ऐमिल **ऐसीटेट** > आइसोऐमिल ऐल्कोहल क्रम में प्राप्त हुई जिसका समर्थन चालकता-मापन द्वारा भी हुआ है। वर्णलेखी तथा वर्णमापी विश्लेषण द्वारा जलीय अपघटन उत्पादों में Cr(III) तथा Cr(VI) का अनुपात 1:3 पाया गया है। जलीय अपघटन उत्पाद बनते समय जल के पी-एच मान में हुए परिवर्तन को भी मापा गया है।

Abstract

Studies on blue perchromates and their hydrolytic products. *By* B. S. Rajput and H. L. Jain, Chemistry Department, Goverment College, Gwalior.

Blue perchomate extracted in three different solvents namely ether, amyl acetate and iso amyl alcohol and their water decomposition products have been studied. The order of stability was found to be ether > amyl acetate > iso amyl alcohol which is also supported by conductivity measurements. The ratio of Cr (III) and Cr (VI) in the water decomposition products of these was found to be 1:3 by chromatographic and colorimetric methods. Variation in pH of water during decomposition of perchromates in water has also been measured.

नीले परक्रोमेट विषयक साहित्य का सर्वेक्षण करने पर ज्ञात होता है कि विभिन्न विलायकों में निष्कर्षित नीले परक्रोमेट के न केवल विघटन काल भिन्न-भिन्न होते हैं[1–3] अपितु इनके जलीय विघटन उत्पाद भी भिन्न-भिन्न होते हैं।

प्रस्तुत शोध पत्र में नीले परक्रोमेट को तीन विलायकों-ईथर, ऐमिल ऐसीटेट और आइसो ऐमिल ऐल्कोहल में निष्कर्षित करके इसके गुणों एवं जलीय अपघटन से प्राप्त पदार्थों का भौतिक एवं रासायनिक विधियों द्वारा अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

नीले परक्रोमेट का बनाना:

नीले परक्रोमेट को बर्फ में ठंडे किये हुए निम्नलिखित विलयनों को क्रमानुसार उनके समक्ष लिखित मात्रा में मिलाकर बनाया गया :

(i) 5 प्रतिशत पोटैशियम डाइक्रोमेट विलयन (25 मिली०)

(ii) $2N$ सल्फ्यूरिक अम्ल (विभिन्न मात्राएं)

(iii) ईथर, ऐमिल ऐसीटेट या आइसोऐमिल ऐल्कोहल (30 मिली०)

(iv) 20 Vol. हाइड्रोजन पराक्साइड (विभिन्न मात्राएं)।

निर्मित नीला परक्रोमेट विलेय होकर कार्बनिक द्रव में आ जाता है, जिसे पृथक्करण कीप द्वारा पृथक् करने के बाद 2-3 बार शीतल आसुत जल से धो लेते हैं और एक शीतल और शुष्क फ्लास्क में लेकर 4-5 घण्टे के लिये रेफ्रीजरेटर में रख देते हैं जिससे कार्बनिक द्रव में अवशोषित जल जमकर पृथक हो सके। तत्पश्चात् इसे एक अन्य शुष्क फ्लास्क में लेकर चारों ओर बर्फ से ढक देते हैं जिससे अध्ययन करते समय इसका विघटन कम से कम हो।

(अ) **आवसीकरण क्षमता :**

नीले परक्रोमेट के प्रत्येक प्रतिदर्श के 2 मिली० का सोडियम थायोसल्फेट के $N/50$ मानक विलयन के साथ निम्न प्रकार दो चरणों में आयोडीमितीय अनुमापन किया।

प्रथम चरण: एक फ्लास्क में 5 मिली० 10 प्रतिशत KI लेकर उसमें 2 मिली० नीला परक्रोमेट डाला और फिर स्टार्च सूचक का उपयोग करके पीला चरम बिन्दु प्राप्त होने तक $N/50$ सोडियम थायोसल्फेट विलयन से अनुमापन किया गया।

द्वितीय चरण : प्रथम चरण के अन्त में प्राप्त पीले पदार्थ को सल्फ्यूरिक अम्ल द्वारा अम्लीय कर पुनः उसी $N/50$ सोडियम थायोसल्फेट विलयन से विशिष्ट हरे चरम बिन्दु तक पुनः अनुमापन किया गया। सारणी 1 में इन अनुमापनों के परिणाम दिये हैं।

सारणी 1

$2NH_2SO_4$ स्थिर किन्तु 20 Vol . H_2O_2 की भिन्न मात्राएं (मिली०)	प्रथम चरण / द्वितीय चरण का अनुपात प्रतिदर्श			20Vol . H_2O_2 स्थिर किन्तु 2 NH_2SO_4 की भिन्न मात्राएं (मिली०)	प्रथम चरण / द्वितीय चरण का अनुपात प्रतिदर्श		
	*प्रथम	*द्वितीय	*तृतीय		प्रथम	द्वितीय	तृतीय
2	0·62	0·61	0·61	0·5	0·58	0·58	0·58
5	0·64	0·56	0·59	1·0	0·59	0·60	0·53
10	0·54	0·63	0·61	2·0	0·54	0·63	0·61
15	0·66	0·59	0·57	5·0	0·66	0·60	0·64
30	0·62	0·64	0·66	10·0	0·64	0·58	0·62

*प्रथम प्रतिदर्श—ईथर निष्कर्षित नीला परक्रोमेट ; द्वितीय ऐमिल ऐसीटेट निष्कर्षित तथा तृतीय प्रतिदर्श-आइसो ऐमिल ऐल्कोहल निष्कर्षित नीला परक्रोमेट ।

(ब) **स्थिरता :**

नीले परक्रोमेट के तीनों प्रतिदर्शों को अनुमापन के लिये आवश्यक समान सांद्रता वाले थायो-सल्फेट के आयतन की दृष्टि से समान नार्मलता वाला बना लिया । अब प्रत्येक 20 मिली० को पृथक पृथक फ्लास्कों में लेकर 20°±05° से० वाले ऊष्मक में रखा और निश्चित समयावधि पर प्रत्येक में से 2 मिली० को 5 मिली० 10 प्रतिशत KI, 5 मिली० $2NH_2SO_4$ तथा स्टार्च सूचक मिला कर अनुमापित किया गया । यह प्रक्रिया प्रत्येक नमूने के लिये नीला रंग उड़ने तक दुहराई गई । प्राप्त निरीक्षण सारणी 2 में प्रस्तुत हैं ।

सारणी 2

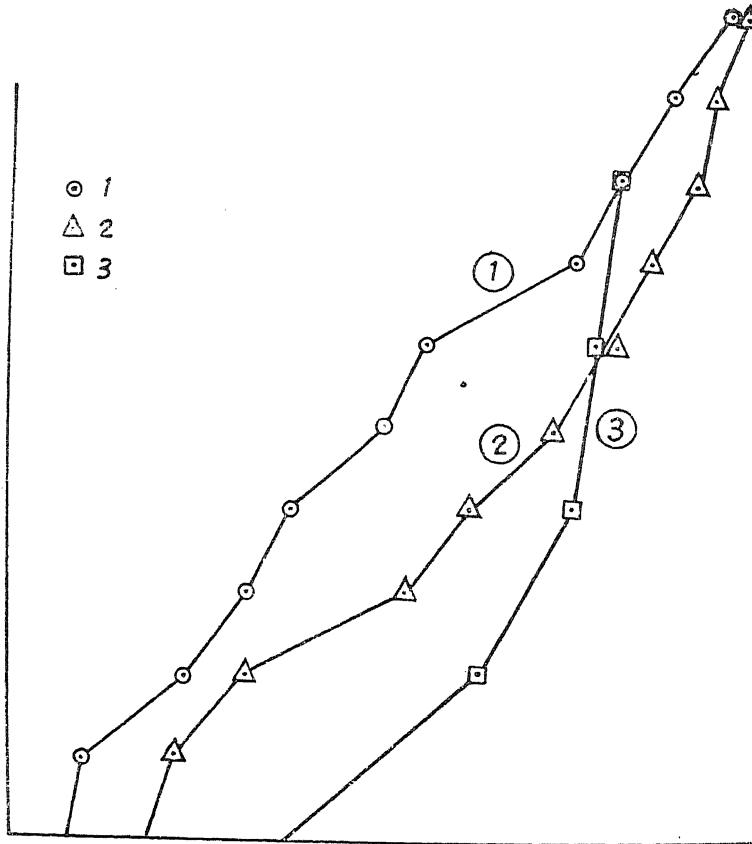
2 मिली० नीले परक्रोमेट के लिये आवश्यक थायोसल्फेट का आयतन

समय (मिनट)	प्रथम प्रतिदर्श	द्वितीय प्रतिदर्श	समय मिनट	तृतीय प्रतिदर्श
0	10.5	10.5	0	10.5
30	9.6	7.6	3	6.4
60	7.7	5.0	6	5.8
90	5.9	3.8	9	5.5
120	3.3	3.0	30	0.0

(स) **पी-एच मापन**

पायरेक्स बीकर में 20 मिली० चालकता-जल लेकर बैकमैन पी-एच-मापी यन्त्र द्वारा पी-एच पढ़ लिया गया। तत्पश्चात् इसमें 10 मिली० ईथर निष्कर्षित नीला परक्रोमेट डाला गया और समय समय पर जल के पी-एच मान में हुए परिवर्तन का निरीक्षण किया गया। अन्य दो नमूनों से भी इसी प्रकार के अध्ययन किये गये। इनसे पता चलता है कि प्रायः सभी प्रतिदर्शों में पी-एच का मान मूल पी-एच 6.9 से घटकर 20-90 मिनट के समय में 2.30 से 3.10 के बीच हो जाता है।

(द) **चालकता मापन**

पायरेक्स बीकर में 20 मिली० चालकता जल लेकर कोलरोशब्रिज द्वारा उसकी चालकता ज्ञात कर ली गई फिर इसमें 10 मिली० नीले परक्रोमेट का प्रथम प्रतिदर्श डाला गया और समय-समय प

चित्र 1 : नीले परक्रोमेट युक्त जल की चालकता में परिवर्तन
वक्र 1, 2 परक्रो मेट के प्रतिदश क्रमांक को बताते हैं

जल की चालकता में हुए परिवर्तन को पढ़ा गया। अन्य दो नमूनों से भी यही अध्ययन दुहराया गया। चित्र 1 में प्रदर्शित तीन रेखाओं द्वारा प्राप्त निरीक्षणों को प्रदर्शित किया गया है।

(य) **जलीय अपघटन उत्पाद (ज० अ० उ०)**

प्रत्येक प्रतिदर्श के लिये चार-चार 150 मिली० वाले फ्लास्क लिये गये। प्रत्येक फ्लास्क में लगभग 10 मिली० आसुत जल डालकर प्रथम चार फ्लास्कों में प्रथम प्रतिदर्श का 2-2 मिली०, द्वितीय चार फ्लास्कों में द्वितीय प्रतिदर्श के 2-2 मिली० तथा तृतीय प्रतिदर्श के 2-2 मिली० डालकर लगभग 2 घण्टे रखा रहने दिया। ऐसा करने से प्रत्येक फ्लास्कों में कार्बनिक तल रंगहीन हो गया तथा जलीय तल पीला हो गया। इस जलीय पीले पदार्थ को नीले परक्रोमेट का जलीय अपघटन उत्पाद कहते हैं। प्रत्येक नमूने के ज० अ० उ० का निम्न प्रकार अध्ययन किया :

(फ) **आक्सीकरण क्षमता**

इसे (i) अनाक्सीकृत और (ii) अक्सीकृत दो अवस्थाओं में निम्न प्रकार ज्ञात किया गया।

अनाक्सीकृत: प्रत्येक नमूने के दो फ्लास्कों में प्राप्त ज० अ० उ० को $2N\ H_2SO_4$ द्वारा अम्लीय कर 5 मिली० 10 प्रतिशत KI तथा स्टार्च मिलाकर $\frac{N}{50}$ सोडियम थायोसल्फेट द्वारा अनुमापन किया गया।

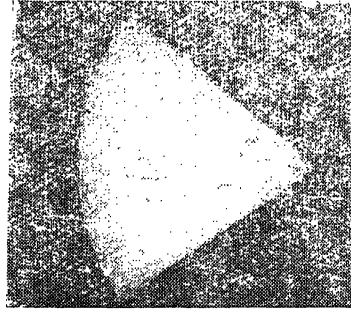
आक्सीकृत : शेष दो फ्लास्कों में प्राप्त ज० अ० उ० को N NaOH द्वारा क्षारीय कर 2 मिली० 100 Vol H_2O_2 द्वारा आक्सीकृत किया गया और H_2O_2 का आधिक्य समाप्त करने के लिये लगभग 45 मिनट तक उबाला गया। ठण्डा करने के पश्चात् इसे $2N\ H_2SO_4$ द्वारा अम्लीय करके तथा 5 मिली०10 प्रतिशत KI एवं स्टार्च सूचक मिलाकर थायोसल्फेट द्वारा अनुमापित किया गया। उपयुक्त अनुमापन द्वारा प्रत्येक प्रतिदर्श के लिये आक्सीकृत/अनाक्सीकृत अनुमापन मानों का अनुपात सारणी 3 में प्रस्तुत है :

सारणी 3

आक्सीकृत/अनाक्सीकृत अनुमापन मानों का अनुपात

प्रथम नमूना	द्वितीय नमूना	तृतीय नमूना
1.15	1.30	1.30
1.24	1.23	1.27
1.26	1.26	1.31
1.27	1.26	1.33
1.27	1.23	1.26

गुणात्मक एवं परिमाणत्मक परीक्षण

गुणात्मक : सारणी-3 में आक्सीकरण द्वारा अनुमापन में होने वाली वृद्धि को ज० अ० उ० के त्रिसंयोजी क्रोमियम Cr(III) की उपस्थिति द्वारा समझाया गया है जो आक्सीकरण करने पर षष्ठ संयोजी क्रोमियम Cr(VI) में परिवर्तित होकर अनुमापन मान में बृद्धि करता है। इस कथन की पुष्टि के लिये प्रत्येक नमूने से प्राप्त ज० अ० उ० के धनायन और ऋणायन को कागज-क्रोमेटोग्राफी (रटर-विधि) द्वारा पृथक किया। इसके लिये 3 मिली० कागज और n-ब्यूटेनॉल (20 मिली०) तथा तनु अम्ल (2 मिली०) से बने विलायक-मिश्रण का उपयोग किया गया। क्रोमियम नाइट्रेट तथा पोटैशियम डाइक्रोमेट विलयन के बिन्दुओं को उपर्युक्त विलायक-मिश्रण के प्रभाव में कागज पर सुव्यक्त त्रिसंयोजी क्रोमियम Cr(III) एवं षष्ठ संयोजी Cr(VI) के *Rf* के मान क्रमशः 0.00 (आन्तरिक और बाह्य) तथा 0.52 (बाह्य) और 0.31 (आन्तरिक) प्राप्त हुए। ज० अ० उ० के बिन्दुओं को उपर्युक्त विलायक मिश्रण में सुव्यक्त करके इस कागज को पहिले ऐलिजैरीन अभिकर्मक और फिर डाइफेनिल कार्बाजाइड अभिकर्मक द्वारा छिड़का तो दो स्पष्ट क्षेत्र (i) नीला बैंगनी Cr(III) और (ii) लाल बैंगनी Cr(VI) प्राप्त हुए (चित्र 2)।

चित्र 2 क्रोमैटोग्राम

परिमाणात्मक: तीनों नमूनों से प्राप्त ज० अ० उ० के वर्णमापी परिमाणात्मक आकलन (i) आक्सीकृत और अनाक्सीकृत ज० अ० उ० के प्रकाशीय घनत्व को मापित कर और (ii) आयन-विनिमय रेजिन द्वारा ज० अ० उ० के धनायन तथा ऋणायन अंशो को पृथक कर उनके प्रकाशीय घनत्व को पृथक-पृथक ज्ञात किया गया। इन परिणामों को सारणी 4-5 में दिया गया है।

विवेचना

सारणी 1 में प्रस्तुत प्रथम चरण/द्वितीय चरण मान तीनों प्रतिदर्शों के लिये 0.54 एवं 0.06 के मध्य है जो प्रत्येक दशा में समान नीले यौगिक के निर्माण का द्योतक है। राय[4-5] ने इन अनुमानों को नीले परक्रोमेट के $Cr_2(Cr_2O_{10})_3$ सूत्र द्वारा समझाया है।

सारणी 2 में प्रस्तुत मान नीले परक्रोमेट की स्थिरता पर निष्कर्षण में प्रयुक्त विलायक के प्रभावों को स्पष्ट करते हैं। वर्तमान श्रृंखला में ईथर निष्कर्षित > ऐमिल ऐसीटेट निष्कर्षित > आइसो ऐमिल ऐल्कोहल का स्थायित्व कम पाया गया है।

पी-एच मानों एवं सारणी 3 के संयुक्त अध्ययन से ज० वि० उ० का क्रोमिक अम्ल न होना सिद्ध होता है। यदि यह क्रोमिक अम्ल होता तो इसका पी-एच बहुत कम होता तथा आक्सीकृत करने पर इसके अनुमापन मान में वृद्धि न होती। अतिरिक्त क्रोमिक लवणों का पी-एच मान सारणी में प्रस्तुत मानों के संनिकट होने का उल्लेख[8] विदित है।

सारणी 4

ज० अ० उ० का प्रकाशीय घनत्व अनुपात (प्रथम विधि)

आक्सीकृत (अ)			अनाक्सीकृत (ब)			आक्सीकृत/अनाक्सीकृत		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
54·5	66	75	41·5	50	59·5	1·31	1·32	1·26
67·0	86	78	49·5	66	60·0	1·34	1·30	1·30
94·0	95	85	74·2	73·5	67·0	1·27	1·29	1·26

सारणी 5

धनायन युक्त भाग आक्सीकृत (अ)			ऋणायन युक्त भाग अनाक्सीकृत (ब)			ऋणायन/धनायन		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
2·0	2·5	3·0	6·0	7·5	9·5	3.0	3·0	3·16
2·5	3·0	3·5	7·0	8·5	11·0	2.8	2·83	2·85
3·5	4·0	4·0	10·0	11·0	12·0	2.85	2·75	3·00

क्रमांक 1,2,3 प्रथम, द्वितीय, एवं तृतीय प्रतिदर्श से प्राप्त अ० ज० उ० बताते हैं।

चित्र 1 में प्रस्तुत तीनों रेखाओं से नीले परक्रोमेट के चरणों में अपघटन की पुष्टि होती है। प्रथम रेखा में दो तथा द्वितीय एवं तृतीय रेखाओं में एक भंग है। प्रथम की अपेक्षा द्वितीय एवं तृतीय प्रतिदर्श के कम स्थिर होने का भी समर्थन करते हैं। रेखाओं में इस प्रकार के भंगों का उपयोग पिल्लई ने जलीय अपघटन में पहले $Cr_2(Cr_2O_8)_3$ तथा फिर $Cr_2(Cr_2O_7)_3$ बनने को समझाने में किया है।

ज० वि० उ० में Cr(III) एवं Cr(VI) की उपस्थिति चित्र 2 से स्पष्ट है । इस निरीक्षण पर सारणी 4 एवं सारणी 5 (अ) एवं (ब) में प्राप्त निरीक्षणों के साथ विचार करने पर ज० वि० उ० के धनायन और ऋणायन में क्रोमियम के 1:3 के अनुपात में होने की पुष्टि होती है । धनायन एवं ऋणायन में क्रोमियम का यही अनुपात $Cr_2(Cr_2O_{10})_3$ में मिलता है ।

अतः उपर्युक्त अध्ययन से पूर्व[6,7] परिणाम (नीले परक्रोमेट का ज० वि० उ० $Cr_2(Cr_2O_7)_3$ है) की पुष्टि होती है तथा यह भी ज्ञात होता है कि निष्कर्षण से प्रयुक्त विभिन्न विलायकों का नीले परक्रोमेट की स्थिरता पर ही प्रभाव पड़ता है, उससे बनने वाले जलीय अपघटन उत्पाद की प्रकृति पर नहीं पड़ता ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक (ब० सिं० राजपूत) विश्व विद्यालय अनुदान आयोग द्वारा प्रदत्त आर्थिक सहायता हेतु आभारी है ।

निर्देश

1. बैरेसविल, एल० सी० ए०, Ann. Chim. Phy. 1857, **(3)20,** 264.
2. ग्रिगी, जी०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1892, **64** (ii), 233.
3. ग्रासेवेनर, डब्लू० एम०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1895, **17**, 417.
4. पिल्लई, सी० वी० पी० तथा राय, आर० सी०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1963, **40**, 344.
5. राय, आर० सी० तथा सत्य प्रकाश Zeit anorg allege, chemie, 1954, **275**, 94.
6. राजपूत, बी० एस० तथा राय, आर० सी०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1965, **42**, 277.
7. राय, आर० सी०, वही, 1957, **34(3)**, 193.
8. टाकू येमूरा, आई० तथा सुयेडा, एच०, Bull facute arts Metier, Tokyo, 1935, **4**, 29.
9. श्वार्ज, आर० तथा गीज़, एच०, Ber. 1932; **65B**, 871.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 17, No. 4, October, 1974, Pages 311-322

भवन निर्माण में संवातन की आवश्यकता एवं उसकी व्यवस्था

ईश्वर चन्द तथा एन० एल० वी० कृषक
केन्द्रीय भवन अनुसंधान संस्थान, रुड़की

[प्राप्त— सितम्बर 4, 1974]

सारांश

प्रस्तुत लेख, भवनों में संवातन सम्बन्धी किये गये अनुसंधान कार्यों के परिणमों पर तैयार किया गया है। इसमें संवातन की आवश्यकता तथा विभिन्न संवातन प्रणालियों का उल्लेख किया गया है। भवनों में प्राकृतिक संवातन के सिद्धांतों पर विशेष रूप से प्रकाश डाला गया है तथा स्थायी संवातन के लिये आवश्यक संवातन की माप, उनकी स्थिति आदि के निर्धारण करने की विधियों का विवरण भी दिया गया है। भवनों में आंतरिक वायु प्रवाह् को नियंत्रित करने वाले घटकों को ध्यान में रखकर, जैसे वायु दिशा, वायु के प्रवेश एवं निकास द्वार की माप, उनकी संख्या व स्थिति तथा उन पर लगे विभिन्न प्रकार के छज्जों आदि के आंतरिक वायु वेग पर पड़ने वाले प्रभाव के विस्तृत विवेचन के साथ साथ उपयुक्त संवातन प्रणाली की रचना के लिये कुछ महत्वपूर्ण सुझाव भी दिये गये हैं।

Abstract

Need for ventilation and its arrangement in house building. *By* Ishwar Chand and N. L. V. Krishak, Central Building Reseach Institute, Roorkee.

A need for ventilation and various systems of ventilation in house building have been discussed based on experimental results.

कार्य स्थल पर उचित एवं उपयुक्त वायु के आवागमन को संवातन कहते हैं। वायु का अभिप्राय उस सामान्य ताप वाली वायु से है, जो धुआँ, धूल कण, वाष्प, विषैली गैस, दुर्गन्ध एवं रोगाणुओं से रहित हो।

स्वास्थ्य एवं सुखप्रद जीवन के लिये उचित वायु संचार का होना अति आवश्यक है। जिन भवनों में वायु संचार व्यवस्था उचित एवं उपयुक्त नहीं होती, उनमें निवास करने वाले व्यक्ति अस्वस्थ तथा अकर्मण्य हो जाते हैं। वायु संचार व्यवस्था को उपयुक्त बनाने के लिये उचित संवातन प्रणाली का ज्ञान होना परमावश्यक है।

संवातन की आवश्यकता :

उपयोगिता के आधार पर संवातन को दो भागों में विभाजित किया गया है,

(1) स्थायी संवातन (permanent ventilation)

(2) सामयिक संवातन (occasional ventilation)

(1) **स्थायी संवातन**

आक्सीजन श्वसन प्रक्रिया में काम आती है तथा उसके परिणामस्वरूप उत्पन्न कार्बन डाइ आक्साइड का संतुलन वायु संचार पर निर्भर करता है। जिन स्थानों पर कार्बनिक पदार्थ, जैसे कोयला, मिट्टी का तेल आदि जलाये जाते हैं, वहाँ पर कार्बन मोनो-आक्साइड गैस प्रचुर मात्रा में उत्पन्न होती है। यह गैस रक्त के हीमोग्लोबीन से क्रिया करके, स्थायी एवं जटिल यौगिक बनाती है जो स्वास्थ्य के लिये हानिकारक होता है। इसलिये कार्बन मोनो आक्साइड की सघनता को कम करने के लिये उचित संवातन का होना अति आवश्यक है।

वायु प्रवाह का दूसरा कार्य रोगाणुओं की सघनता को कम करके उनके प्रसार एवं प्रभाव को क्षीण बनाना है। इसके अतिरिक्त दूषित एवं दुर्गन्धित गैसों के निराकरण के लिये भी भवनों में बाहर की शुद्ध वायु का प्रवाह आवश्यक है। संवातन की आवश्यकता प्रत्येक मौसम में होती है इसीलिये इसको स्थायी संवातन कहते हैं। स्थायी संवातन का मापन, दुर्गन्धित वायु के निराकरण के लिये आवश्यक वायु आयतन पर निर्भर करता है। इसके अनुसार प्रत्येक व्यक्ति के लिये आवश्यक स्वच्छ वायु की दर सारणी 1 में दर्शायी गयी है।

सारणी 1

क्रमांक	वायु आयतन प्रति व्यक्ति	वायु प्रवाह प्रति व्यक्ति
1	5·5 घन मीटर	28·5 घन मीटर/घंटा
2	8·5 ,,	20·5 ,,
3	11·0 ,,	17·0 ,,

उदाहरणत: यदि एक व्यक्ति के लिये 5·5 घन मीटर वायु प्राप्त हो, तब वायु-प्रवाह की दर 28·5 घन मीटर/घंटा होनी चाहिए।

(2) **सामयिक संवातन**

वर्षा एवं ग्रीष्म ऋतु में सभी व्यक्ति मकानों में रहते हैं, किन्तु आर्द्रता तथा उष्मा के कारण अन्दर रहना कठिन हो जाता है। शरीर से पसीना निकलने के परिणामस्वरूप अप्रिय दुर्गन्ध उत्पन्न होती है, कभी कभी अधिक आदमी एकत्रित होने से भी, अधिक उष्मा एवं दुर्गन्ध के कारण दम घुटने

लगता है। उत्पन्न उष्मा के संतुलन के लिये आवश्यक संवातन दर की गणना समीकरण 1 से कर ली जाती है।

$$Q = q/\rho C(\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

जबकि Q=आवश्यक संवातन दर, घन मीटर/घंटा

q=उत्पन्न उष्मा की मात्रा, कैलोरी/घंटा

ρ=वायु का घनत्व, ग्राम/घन सेन्टीमीटर

C=वायु की विशिष्ट उष्मा

$(\theta_2 - \theta_1)$=भवन के आन्तरिक एवं बाह्य ताप में अन्तर, डिग्री सेन्टीग्रेड।

उपर्युक्त समीकरण में q, ρ, C, θ_1 तथा θ_2 का मान रख कर आवश्यक संवातन दर को ज्ञात किया जा सकता है।

आराम के लिये आवश्यक वायु गति :

आर्द्रता वाले क्षेत्रों में वायु गति में वृद्धि करने से वाष्पीकरण (evaporation) की गति बढ़ जाती है जिसके कारण शरीर को ठंडक अनुभव होती है। इस प्रकार वायु प्रवाह आरामदायक स्थिति उत्पन्न करने में सहायता करता है। शुष्क एवं आर्द्रता की विभिन्न स्थितियों में आवश्यक वायुवेग समीकरण[3] (2) से प्राप्त किया जा सकता है।

$$V = 0{\cdot}065\ (t + t_w - 51)^2 \quad (2)$$

जबकि V=वायु वेग मीटर/सेकेन्ड

t=शुष्क बल्ब ताप, डिग्री सेन्टीग्रेड

t_w=आर्द्र बल्ब ताप, डिग्री सेन्टीग्रेड

संवातन प्रणालियाँ

संवातन प्रणालियाँ मुख्यत: दो प्रकार की होती हैं।

(1) कृत्रिम संवातन (artificial ventilation)

(2) प्राकृतिक संवातन (natural ventilation)

(1) कृत्रिम संवातन :

कृत्रिम संवातन के अंर्तगत वे सभी साधन आते हैं जो प्राय: विद्युतचालित होते हैं, जैसे विद्युत पंखा, एयर कन्डीशनर आदि।

(2) प्राकृतिक संवातन :

प्राकृतिक संवातन दो बलों पर निर्भर करता है,

(अ) उष्मीय बल

(ब) वायु बल

(अ) उष्मीय बल (thermal force):

जिस समय भवन के अन्दर की वायु का ताप बाह्य वायु के ताप से अधिक होता है, उस समय बाहरी हवा निम्न स्तर पर लगी खिड़की में से भवन में प्रवेश करके ऊपरी स्तर पर लगी खिड़की से बाहर निकल जाती है ।

इस प्रकार होने वाले वायु प्रवाह की दर को समीकरण (3) से ज्ञात किया जा सकता है,

$$Q=8A[h\ (\theta_2-\theta_1)]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

जबकि Q=वायु प्रवाह घनमीटर/मिनट

A=दोनों खिड़कियों का क्षेत्रफल बराबर मानकर, वर्गमीटर

h=दोनों खिड़कियों की उँचाई में अन्तर, मीटर

$(\theta_2-\theta_1)$=भवन के अन्दर एवं बाहर तापान्तर, डिग्री सेन्टीग्रेड

उपर्युक्त समीकरण में A, h, θ_1 तथा θ_2 का मान रखकर Q की गणना की जा सकती है ।

(ब) **वायु बल** (wind force) :

भवनों में वायु संचरण को प्रेरित करने वाला दूसरा बल वायु बल होता है । जब वायु किसी भवन की दीवार पर टकराती है, तब उस दीवार पर, सामान्य दाब से अधिक दाब उत्पन्न हो जाता है, जबकि शेष दीवारों पर दाब सामान्य दाब से कम हो जाता है। यदि भिन्न दाब वाली दीवारों में खिड़की की व्यवस्था कर दी जाये, तब आन्तरिक वायु संचरण होने लगता है । इस वायु संचरण की दर को समीकरण (4) से प्राप्त किया जा सकता है ।

$$Q=0{\cdot}6AV \quad (4)$$

जबकि Q=वायु वेग दर, घनमीटर/घंटा

A=दोनों खिड़कियों का क्षेत्रफल बराबर मानकर, वर्ग मीटर

V=वायु वेग मीटर/घंटा

यदि प्रवेश द्वार और निकास द्वार का क्षेत्रफल बराबर न हो तब उपर्युक्त समीकरण में A के स्थान पर A_e का मान लगाते हैं ।

$$A_e=A_1A_2\left[\frac{(A_1{}^2+A_2{}^2)}{2}\right]^{-1/2}$$

A_1A_2 प्रवेश द्वार एवं निकास द्वार के अलग अलग क्षेत्रफल हैं ।

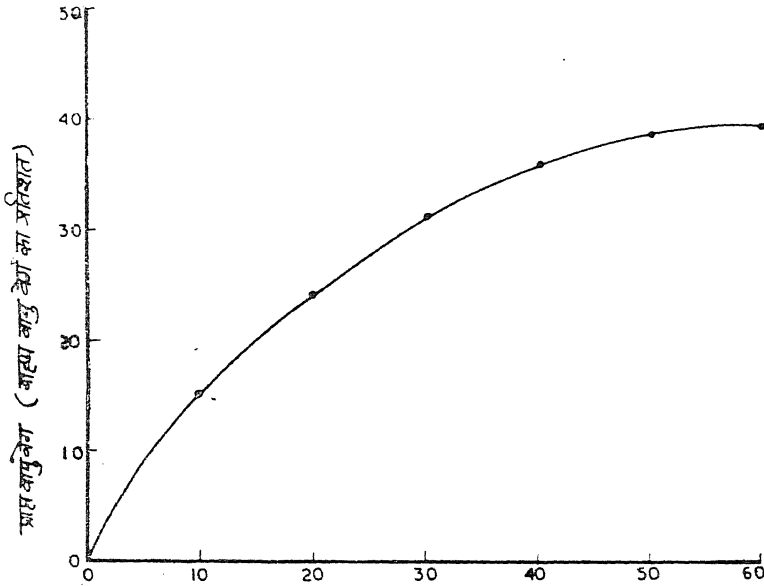
आन्तरिक वायु वेग परबाह्य वायु बल का प्रभाव :

भवन की बनावट जैसे खिड़कियों की माप, उनका स्थान व संख्या तथा उन पर लगे विभिन्न प्रकार के छज्जों आदि का, आन्तरिक वायु वेग पर बड़ा प्रभाव पड़ता है। इन सभी बातों का प्रयोगात्मक

अध्ययन मॉडल बनाकर वायु सुरंग (wind tunnel) में किया गया है[4][5] तथा अध्ययन से प्राप्त निष्कर्ष निम्न प्रकार हैं :

(1) यदि वायु दिशा खिड़की के साथ लम्बवत हो और मकान की एक दीवार में केवल एक खिडकी लगी हो, तब आन्तरिक वायु वेग, बाह्य वायुवेग का लगभग 10 प्रतिशत होता है। खिड़की की लम्बाई, चौडाई की निष्पत्ति में परिवर्तन करने से आन्तरिक वायु वेग पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है।

(2) यदि वायु दिशा खिड़की के लम्बवत् न होकर झुकी हुई हो, तब खिड़की के स्थान पर उसके क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाली दो खिड़कियाँ लगाने से आन्तरिक वायु को, बाह्य वायु वेग का 15 प्रतिशत तक बढ़ाया जा सकता है।

(3) यदि किसी कमरे की आमने-सामने की दीवारों में 0·9 मीटर उँचाई पर दो बराबर क्षेत्रफल वाली खिड़कियाँ लगीं हो और उनमें से एक वायु दिशा के लम्बवत हो, तब आन्तरिक वायुवेग का मान, खिड़कियों के क्षेत्रफल की वृद्धि के साथ साथ बढ़ता है (चित्र 1)। खिड़कियों का कुल क्षेत्रफल फर्श के क्षेत्रफल का 50 प्रतिशत होने पर, प्राप्त आन्तरिक वायु वेग का मान, बाह्य वायु वेग का 40 प्रतिशत होता है। खिड़कियों का क्षेत्रफल और बढ़ाने पर आन्तरिक वायु वेग पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता।

चित्र 1

चित्र 1 की सहायता से खिड़कियों की माप ज्ञात होने पर आन्तरिक वायु वेग की गणना की जा सकती है, इसके विपरीत आवश्यक आन्तरिक वायु वेग के लिये, खिड़कियों के क्षेत्रफल का निर्धारण

भी चित्र 1 से ही किया जा सकता है। उदाहरणतः चित्र 1 से 30% आन्तरिक वायु वेग के लिये खिड़कियों का क्षेत्रफल फर्श के क्षेत्रफल का 30% ही लेना चाहिए।

(4) यदि देहरी (sill) की ऊँचाई 0·9 मीटर से भिन्न है तब आन्तरिक वायु वेग की गणना समीकरण (5) से की जा सकती है।

$$V=V_{0\cdot9}+7{\cdot}2(1-S) \qquad (5)$$

जबकि $V_{0\cdot9}$=चित्र 1 से प्राप्त आन्तरिक वायु वेग

S=आवश्यक देहरी की उँचाई, मीटर/0·9

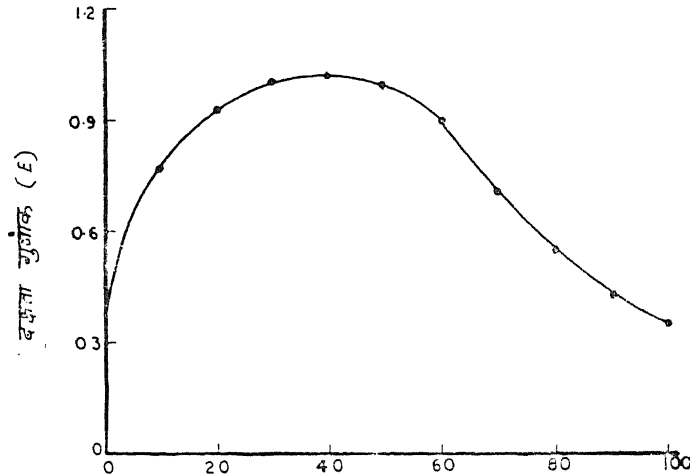
उदाहरणतः माना कि आकृति 1 से $V_{0\cdot9}$ का मान 35 प्रतिशत है, तथा देहरी की ऊँचाई 0·7 मीटर है, तब

$$S=0{\cdot}7/0{\cdot}9=0{\cdot}77$$

$$V=35+72\times0{\cdot}23=36{\cdot}65\%$$

अतः आन्तरिक वायु वेग का मान, वाह्य वायु वेग के मान का 36·65 प्रतिशत होगा।

(5) प्रवेश द्वार (inlet) का क्षेत्रफल निकास (outlet) द्वार के क्षेत्रफल से भिन्न होने की स्थिति में उपर्युक्त विधि से प्राप्त वेग को चित्र 2 से प्राप्त दक्षता गुणांक (efficiency factor) से गुणा

चित्र 2

करके आन्तरिक वायु वेग का मान प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरणतः प्रवेश द्वार का क्षेत्रफल दोनों खिड़कियों के क्षेत्रफल का 40% हो तब, 40 के सापेक्ष दक्षता गुणांक का मान 1·05 आता है। माना कि चित्र 1 से प्राप्त वेग 35% है तब आन्तरिक वायु वेग (V) की गणना निम्न प्रकार की जा सकती है,

$$V = V_{0 \cdot 9} \times E$$
$$= 35 \times 1 \cdot 05 = 36 \cdot 75$$

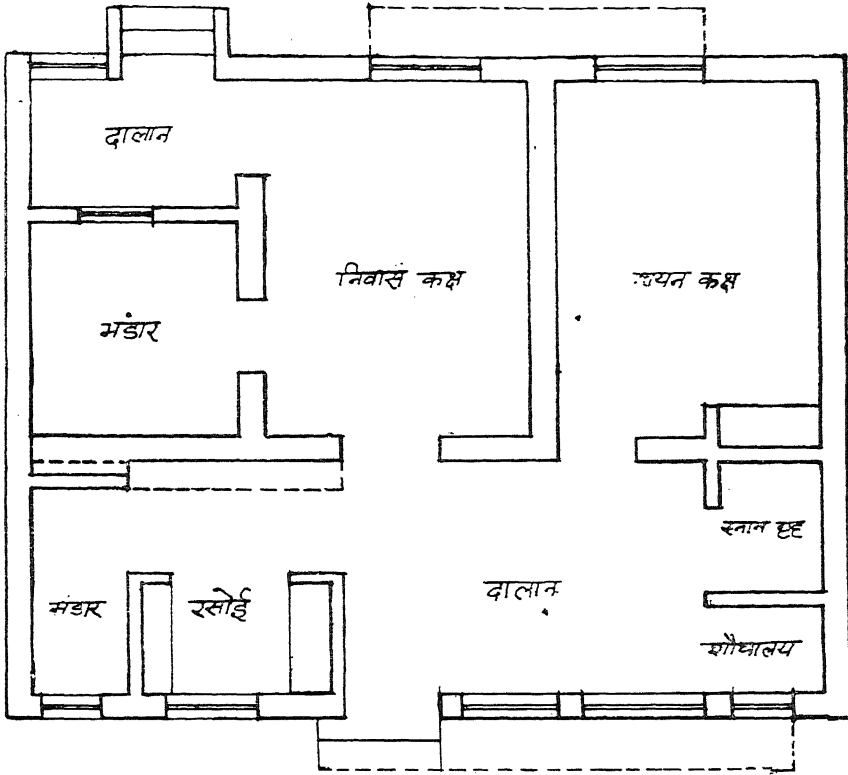
अत: आन्तरिक वायु वेग का मान, वाह्य वायु वेग के मान का 36·75% होगा।

(6) यदि वायु दिशा खिड़की पर लम्बवत न होकर किसी झुकी हुई स्थिति में हो, तब उपर्युक्त विधि से प्राप्त वेग को सारणी 2 में दिये गये घटकों से गुणा करके आन्तरिक वायु वेग की गणना कर ली जाती है।

सारणी 2

क्रमांक	दोनों खिड़कियों की माप का अनुपात	गुणांक घटक
1.	प्रवेश द्वार > निकास द्वार	1·0
2.	प्रवेश द्वार = निकास द्वार	0·8
3.	प्रवेश द्वार < निकास द्वार	0·7

चित्र 3

सारणी 3

वायु दिशा → / खिड़कियों की स्थिति ↓	(↓)	(↙)
1	0	0
2	-10	+40
3	-10	-15
4	-15	0
5	-15	0
6	0	0
7	-10	+40
8	-10	-15
9	0	-60
10	-20	-10
11	-20	-60

वायु वेग में परिवर्तन (V का प्रतिशत)

सारणी 5

दरवाजों की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ

वेग ह्रास	वेग ह्रास (↑)	वेग ह्रास (↗)
	7·5 / 7·5	15 / 15
	–, 10 / –, 20	–, 45 / –, 15
40, 40 / 25, 20	75, 15 / 75, 25	80, 45 / 80, 15
50, 20 / 25, 20	13, 15 / 20, 20	35, 50 / 15, 15
40, 45 / 30, 20	20, 20 / 20, 20	45, 55 / 30, 30
40, 25 / 30, 25	–, 10 / 45, 25	–, 45 / 20, 35
30, 50 / 55, 20	45, – / 25, 25	50, – / 35, 15
55, 35 / 55, 15	45, 25 / –, 25	50, 50 / –, 15
30, 45 / 45, 20	40, 40 / 25, 20	55, 55 / 35, 20
30, 35 / 35, 20	15, 15 / 15, 30	25, 40 / 15, 15

उदाहरणत: मान लिया कि प्रवेश द्वार के क्षेत्रफल से निकास द्वार का क्षेत्रफल बड़ा है तब सारणी 2 से गुणांक घटक का मान 0·7 प्राप्त होता है। यदि प्राप्त वेग 32 प्रतिशत है तब वर्तमान स्थिति में आन्तरिक वायुवेग

$$=32\times0{\cdot}7=22{\cdot}4 \text{ प्रतिशत प्राप्त होगा।}$$

(7) दीवारों के सापेक्ष खिड़कियों की स्थिति का आन्तरिक वायु वेग पर बड़ा प्रभाव पड़ता है। जब खिड़कियों की स्थिति दीवार के मध्य में न हो, तब आन्तरिक वायु वेग का मान ज्ञात करने के लिये, उपर्युक्त विधि से प्राप्त वेग में सारणी 3 में दिया गया मान जोड दिया जाता है। उदाहरणत: मान लिया कि खिड़कियों की स्थिति सारणी 3 में प्रदर्शित की गयी स्थिति 2 के समरूप है तथा उपर्युक्त विधि से प्राप्त आन्तरिक वायु वेग 30% है, तब इस दशा में आन्तरिक वायु वेग

$$V=30-\frac{30\times10}{100}=27\%$$

प्राप्त होगा।

(8) खिड़कियों पर छज्जा लगाने से भी आन्तरिक वायु वेग परिवर्तित हो जाता है। विभिन्न प्रकार के छज्जों द्वारा आन्तरिक वायु वेग में उत्पन्न परिवर्तन सारणी 4 में प्रदर्शित किये गये हैं। आन्तरिक वायु वेग प्राप्त करने के लिये, उपर्युक्त विधि से प्राप्त वेग में, सारणी 4 में दिया गया मान जोड़ दिया जाता है।

सारणी 4

क्रमांक	विभिन्न प्रकार के छज्जे	वायु वेग में परिवर्तन (V का प्रतिशत)	
		0°	45°
1	क्षैतिज छज्जा	−20	−20
2	बहु क्षैतिज छज्जा	−10	−13
	बहु उद्ध्र्वाधर छज्जा	−15	−25
4	समकोणीय छज्जा	5	10
5	बाक्स आकृति छज्जा	0	−25
	1:1	0	0
	2:1		

उदाहरणतः स्थिति 4 में लम्बवत दिशा के लिये वेग में परिवर्तन +5 है, यदि उपर्युक्त विधि से प्राप्त वेग का मान 25% है तब आन्तरिक वायु वेग का मान 26·25% होगा।

(9) सामूहिक एवं पारस्परिक जुड़े कमरों में लगने वाले दरवाजों की भिन्न भिन्न स्थितियों का आन्तरिक वायु वेग पर बहुत प्रभाव पड़ता है। आन्तरिक वायु वेग का मान, उपर्युक्त विधि से प्राप्त

मान में से सारणी 5 में दिये गये मान को घटाने पर प्राप्त होता है। उदाहरणतः सारणी 5 की प्रथम स्थिति से आन्तरिक वेग ह्रास 40% है, तब आन्तरिक वायु वेग का मान

$$V = 30 - \frac{30 \times 40}{100} = 18\%$$

प्राप्त होगा।

उदाहरणार्थ :

(1) वायु दिशा खिड़की पर लम्बवत हो तब चित्र 3 में दर्शाये गये दो कमरों वाले भवन के निवास कक्ष में वायु वेग का मान चित्र 3 के अनुसार ज्ञात करना।

हल :— प्रवेश द्वार की माप $= 1 \cdot 6$ मीटर²

निकास द्वार की माप $= 1 \cdot 9$ मीटर²

फर्श का क्षेत्रफल $= 11 \cdot 3$ मीटर²

दोनों खिड़कियों का कुल क्षेत्रफल $= 3 \cdot 5$ मीटर², जो फर्श के क्षेत्रफल का 31% है। चित्र 1 से 34 के सापेक्ष आन्तरिक वायु वेग (V_i) का मान बाह्य वेग (V_0) के मान का 32% प्राप्त होता है।

(2) $\frac{\text{प्रवेश द्वार की माप} \times 100}{\text{दोनों खिड़कियों का क्षेत्रफल}} = 45\%$

चित्र 2 से 45 के सापेक्ष दक्षता गुणांक $= 1 \cdot 00$

तथा आन्तरिक वायु वेग $(V_i) = 0 \cdot 32 \times V_0 \times 1 \cdot 00$

$$= 0 \cdot 32\ V_0$$

(3) चूँकि खिड़की की देहरी की ऊँचाई $= 0 \cdot 76$ मीटर

अतः खिड़की के तल पर औसत आन्तरिक वायु वेग,

$$V_1 = \left[0 \cdot 32 + \frac{7 \cdot 2}{100}\left(1 - \frac{0 \cdot 76}{0 \cdot 9}\right)\right] V_0$$

$$= 0 \cdot 331\ V_0$$

(4) चूँकि वायु दिशा लम्बवत तथा प्रवेश द्वार दीवार के मध्य में है अतः सारणी 3 के अनुसार उपर्युक्त मान अपरिवर्तनीय है।

(5) चूँकि खिड़की पर क्षैतिज छज्जा लगा है अतः वेग ह्रास सारणी 4 से 20% प्राप्त होता है।

$$\text{आन्तरिक वेग } (V'') = \left[0{\cdot}331\left(1-\frac{20}{100}\right)\right] V_0$$
$$= 0{\cdot}265\ V_0$$

(6) श्रेणी क्रम में लगे कमरों में सारणी 5 से आन्तरिक वायु वेग ह्रास --20% है। अतः

$$\text{औसत आन्तरिक वेग } (V) = 0{\cdot}265\left(1-\frac{20}{100}\right) V_0 = 0{\cdot}212\ V_0$$
$$= 21{\cdot}2\%$$

अतः औसत आन्तरिक वायु वेग बाह्य वायु वेग का 21·2% हुआ।

भवन निर्माण के लिये उपयोगी सुझाव :

(1) प्रत्येक कमरे में कम से कम दो खिड़कियाँ लगानी चाहिये। एक खिड़की वायु दिशा की ओर की दीवार में तथा दूसरी खिड़की शेष दीवारों में से किसी एक पर लगी होना आवश्यक है।

(2) सामान्य कार्यतल पर, उपयुक्त आन्तरिक वायु वेग के लिये, खिड़की की देहरी की ऊँचाई 0·9 मीटर रखनी चाहिये।

(3) दोनों खिड़कियों का क्षेत्रफल, फर्श के क्षेत्रफल का 20% से 30% तक लेने से, आन्तरिक वायु वेग का मान, बाह्य वायु वेग के मान का केवल 27% तक प्राप्त किया जा सकता है। खिड़कियों का क्षेत्रफल और अधिक बढ़ाने से आन्तरिक वायु वेग में अपेक्षाकृत कम वृद्धि होती है जो साधारणतः 40% से अधिक नहीं बढ़ाई जा सकती।

(4) जब वायु दिशा प्रायः स्थिर रहती हो तब प्रवेश द्वार का क्षेत्रफल निकास द्वार के क्षेत्रफल से कम रखना चाहिये परन्तु वायु दिशा समय समय पर परिवर्तित होने की स्थिति में, दोनों खिड़कियों का क्षेत्रफल बराबर रखना चाहिये।

(5) यदि कमरे की एक दीवार में खिड़की लगानी पड़े तब एक खिड़की के स्थान पर, उसके क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाली, दो खिड़कियाँ लगाने से आन्तरिक वायु वेग बढ़ जाता है।

(6) सारणी 3 की स्थिति 2 तथा 7 में प्रदर्शित की गयी खिड़कियों की स्थितियाँ सर्वोत्तम हैं।

(7) सारणी 4 की स्थिति 4 के अनुसार छज्जे लगाने से आन्तरिक वायु वेग को बढ़ाया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एन० के० डी० चौधरी द्वारा दिये गये सुझावों के लिये आभारी हैं। प्रस्तुत लेख केन्द्रीय भवन अनुसंधान संस्थान, रुड़की के नियमित शोध कार्य का एक अंश है, तथा निदेशक महोदय की अनुमति से प्रकाशित किया जा रहा है।

निर्देश

1. गिवोनी बी०, मेन क्लाईमेट एंड आर्कीटेकचर, एल्सीवीअर पब्लिशिग कम्पनी , लन्दन, 1969
2. जे० एफ० वान स्टेटन, थर्मल परफारमेन्स आफ बिल्डिंग, एल्सीबीअर पब्लिशिग कम्पनी लन्दन, 1967
3. वेब, सी० जी०, थरमल कम्फर्ट इन एन इक्वीटोरियल क्लाइमेट, जरनल आफ दी इंस्टीट्यूशन आफ हीटिंग एंड वेन्टीलेटिंग इन्जीनियर्स, जनवरी, 1960
4. ईश्वर चन्द तथा एन० एल० बी० कृषक, विन्डो डिजायन फार नेचुरल वेन्टीलेशन इन ट्रोपिक्स, सी० बी० आर० आई० बिल्डिंग डाइजेस्ट नं० 62
5. ईश्वर चन्द, प्रोडक्शन आफ एअर मूवमेन्ट इन बिल्डिंग्स, सी० बी० आर० आई० बिल्डिंग नं० 100

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $K_4Fe(CN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा! चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (References) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख "**सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग**", इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक